SÉRIE A N· 3940
N· D'ORDRE
4791

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean LAVOINE

PREMIÈRE THÈSE

Calcul Symbolique des Distributions et des Pseudo-Fonctions

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 juin 1962 devant la Commission d'examen

MM. FORTET — *Président*
SCHWARTZ, DELANGE — *Examinateurs*
PETIAU — *Invité*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538126_0049

SÉRIE A, N: 3940
N· D'ORDRE
4791

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean LAVOINE

PREMIÈRE THÈSE

Calcul Symbolique des Distributions et des Pseudo-Fonctions

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 juin 1962 devant la Commission d'examen

MM.	FORTET	*Président*
	SCHWARTZ	*Examinateurs*
	DELANGE	
	PETIAU	*Invité*

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... J. PERES

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristal.
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie Générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (SPCN)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIERE	T	Géologie SPCN et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (SPCN)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie Minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie Végétale
MARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
FRANCON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET	T	Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY		Biologie Végétale (PCB)
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie Vég. BMPV
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie Végé. (Orsay)
NOIROT	T	Evolution des Etres Org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Recherches Physiques
GUINOCHET	T	Biol. Vég. SPCN (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques Géné. Orsay
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Energies (Orsay)
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Ors)
M. JULIA		Etudes des Moléculaires naturelles complexes
LENDER	T	Biol. Animale (SPCN) Orsay
MAGAT		Physico-chimie des radioéléments
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
GUERIN	T	Chimie M.P.C. (Orsay)
CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay)
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL L.		Phys. Théor. des Htes Energies (Orsay)
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)
BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (Orsay)
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique
ELLENBERGER	T	Géologie appli. s/le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie Biol. (Orsay)
BAUDOIN		Biologie animale P.C.B.
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT	T	Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Botanique
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FREON	T	Chimie organique (Orsay)
HELLER	T	Physiologie végétale
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mlle FOURCHOY		Biol. Végétale (SPCN)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste
Mlle VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET	T	Mécanique des Fluides
CORABŒUF		Physiologie Animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE		Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay)
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T	Mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay)
THIRY	T	Mécanique céleste

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Secrétaire Général ..... R. POULLAIN

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à M. Laurent Schwartz pour ses précieuses leçons qui m'ont aidé à faire cette Thèse, et à MM. Robert Fortet, Hubert Delange et Gérard Pétiau qui m'ont fait l'honneur de se joindre à lui pour constituer le Jury.

Jean LAVOINE

SÉRIE A, N: 3940
N· D'ORDRE
4791

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean LAVOINE

PREMIÈRE THÈSE

Calcul Symbolique des Distributions et des Pseudo-Fonctions

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 juin 1962 devant la Commission d'examen

MM.	FORTET	*Président*
	SCHWARTZ	*Examinateurs*
	DELANGE	
	PETIAU	*Invité*

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... J. PERES

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristal.
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie Générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (SPCN)
CHRETIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIERE	T	Géologie SPCN et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (SPCN)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie Minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie Végétale
MARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
FRANCON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET	T	Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY		Biologie Végétale (PCB)
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie Vég. BMPV
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie Végé. (Orsay)
NOIROT	T	Evolution des Etres Org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Recherches Physiques
GUINOCHET	T	Biol. Vég. SPCN (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques Géné. Orsay
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Energies (Orsay)
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Ors)
M. JULIA		Etudes des Molécules naturelles complexes
LENDER	T	Biol. Animale (SPCN) Orsay
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
GUERIN	T	Chimie M.P.C. (Orsay)
CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay)
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL L.		Phys. Théor. des Htes Energies (Orsay)
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)
BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (Orsay)
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique
ELLENBERGER	T	Géologie appli. s/le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie Biol. (Orsay)
BAUDOIN		Biologie animale P.C.B.
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT	T	Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Botanique
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FREON	T	Chimie organique (Orsay)
HELLER	T	Physiologie végétale
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mlle FOURCHOY		Biol. Végétale (SPCN)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste
Mlle VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET	T	Mécanique des Fluides
CORABŒUF		Physiologie Animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE		Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay)
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T	Mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay)
THIRY	T	Mécanique céleste

Secrétaire Général ..... R. POULLAIN

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à M. Laurent Schwartz pour ses précieuses leçons qui m'ont aidé à faire cette Thèse, et à MM. Robert Fortet, Hubert Delange et Gérard Pétiau qui m'ont fait l'honneur de se joindre à lui pour constituer le Jury.

Jean LAVOINE

INTRODUCTION

On connait l'utilité et le succès du Calcul Symbolique basé sur la transformation de Laplace

$$h(t) \sqsupset H(p) = \int_{0}^{+\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad (1)$$

qui à une fonction $h(t)$ *localement sommable* pour $t \geq 0$ et majorée en module par $e^{\xi_0 t}$ lorsque $t \longrightarrow \infty$, fait correspondre une fonction $H(p)$ de la variable complexe p, *holomorphe* dans le demi-plan $\mathrm{Re}\ p > \xi_0$. $H(p)$ est l'image de $h(t)$, $h(t)$ l'original de $H(p)$. Une fonction holomorphe de p dans un demi-plan n'a pas nécessairement un original, - n'est pas nécessairement une image.

La généralisation de cette transformation revêt deux aspects :

1/ Comment généraliser pour que des fonctions non sommables comme $1/t^{\nu}J_0(t)/t^{\nu}$, $\nu \geq 1$, aient des images sur lesquelles on puisse faire les opérations du Calcul Symbolique ? On atteint ce résultat en appliquant à l'intégrale (1) la généralisation de M. J. Hadamard - c'est-à-dire en faisant appel aux "pseudo-fonctions" de M. L. Schwartz.

2/ Comment généraliser pour que des fonctions holomorphes aussi simples par exemple que p^{ν}, $\nu \geq 1$, $\mathrm{Re}\ p > 0$, soient les images d'êtres mathématiques ayant des propriétés analogues à celles des fonctions $h(t)$. On obtient ce résultat en prolongeant la transformation (1) aux distributions ; alors, "toute fonction de p holomorphe dans un demi-plan de la forme $\mathrm{Re}\ p > \xi$ est l'image de Laplace d'une distribution".

Comme les fonctions $h(t)$ et les pseudo-fonctions sont des distributions particulières, le Calcul symbolique des distributions constitue bien la généralisation cherchée. La première partie de ce livre lui est consacrée.

La seconde partie est une table d'images de pseudo-fonctions qui prolonge les tables de Mac Lachlan et Humbert, de Erdélyi et Magnus, etc., consacrées aux fonctions localement sommables.

PREMIÈRE PARTIE

DÉFINITIONS ET THÉORÈMES

CHAPITRE I

DISTRIBUTIONS ET PSEUDO-FONCTIONS

I - DISTRIBUTIONS -

Pour l'étude approfondie de la théorie des distributions, nous renvoyons au livre de M. Laurent Schwartz [1] ou à [2] (1). Nous en donnons ici un simple résumé.

Soient R la droite portant les abscisses de la variable réelle t et $\varphi(t)$ une fonction à valeur complexe sur R. On appelle *support* de $\varphi(t)$ le plus petit ensemble fermé de R hors duquel $\varphi(t)$ est identiquement nulle.

Soit $(\mathcal{D})$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi(t)$, *indéfiniment dérivables* et *à support borné*. On munit $(\mathcal{D})$ de la notion de convergence suivante : des φ_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{D})$ si les $\varphi_j(t)$ ont leurs supports contenus dans un même ensemble borné de R et convergent vers 0 uniformément sur R, et s'il en est ainsi de chacune de leurs dérivées. On appelle *distribution* toute fonctionnelle linéaire sur $(\mathcal{D})$ continue pour cette convergence. Les distributions forment un espace vectoriel, noté $(\mathcal{D}')$, qui est le dual topologique de $(\mathcal{D})$. L'application d'un élément T de $(\mathcal{D}')$ à une φ sera notée

$$< T, \varphi > \quad \text{ou} \quad < T_t, \varphi(t) >$$

Par exemple, si $f(t)$ est une fonction localement sommable (2), l'application

$$\varphi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt$$

définit une distribution, S. On identifie S et $f(t)$. Cette identification est essentielle ; elle permet de considérer $f(t)$ tantôt comme une fonction, tantôt comme une distribution et d'écrire

$$(I.\,I.\,1) \qquad < f(t),\ \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt$$

On peut remplacer φ par ses dérivées ; en particulier

$$(I.\,I.\,2) \qquad < Y(t-c),\ \varphi' > = \int_{c}^{+\infty} \varphi'(t)\ dt = -\varphi(c) \quad ,$$

---

(1) les chiffres entre [ ] renvoient à la bibliographie - Voir aussi Martineau et Trèves.

(2) localement sommable = intégrale au sens de Lebesgue surtout ensemble fermé borné.

$Y(t-c)$ désignant dans ce livre la fonction *échelon unité* de Heaviside :

$$Y(t-c) = 0 \quad \text{pour} \quad t < c$$

$$Y(t-c) = 1 \quad \text{pour} \quad t > c \ .$$

Il importe de préciser que, lorsqu'on identifie $f(t)$ à S, on identifie en même temps à la distribution S *toutes* les fonctions de la classe de $f(t)$, c'est-à-dire qui ne sont différentes de $f(t)$ que sur un ensemble de mesure nulle (1).

L'application $\varphi \longrightarrow \varphi(c)$ définit aussi une distribution, qui est la *mesure de Dirac* $\delta(t-c)$,

(I. I. 3) $$< \delta(t-c), \ \varphi > = \varphi(c) \ .$$

Les physiciens traitent parfois cette distribution comme une fonction et écrivent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c) \ \varphi(t) \ dt = \varphi(c)$$

ce qui rejoint (I. I. 1). Nous emploierons presque toujours δ au lieu de $\delta(t)$.

Dérivation.

On appelle dérivée d'ordre k d'une distribution T la distribution $\frac{d^k}{dt^k} T$ définie par

(I. I. 4) $$< \frac{d^k}{dt^k} T \ , \varphi > = (-1)^k < T, \ \varphi^{(k)} > \ ,$$

$\varphi^{(k)}(t)$ désignant la $k^{\text{ième}}$ dérivée ordinaire de la fonction $\varphi(t)$.

Nous emploierons de même $f'(t)$, $f^{(k)}(t)$, ou $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t)$ pour les dérivées *ordinaires* de la fonction $f(t)$, réservant toujours $\frac{d^k}{dt^k} f(t)$ à ses dérivées en tant que distribution.

Si $f(t)$ a une discontinuité de première espèce pour $t=c$ et pour $t < c$ et $t > c$ une dérivée (au sens usuel) $f'(t)$ bornée,

(I. I. 5) $$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t) + [f(c+) - f(c-)] \ \delta(t-c)$$

En particulier, si $h(t)$ est continue sur $(0, \infty)$ et y a une dérivée bornée

(I. I. 6) $$\frac{d}{dt} Y(t) \ h(t) = Y(t) \ h'(t) + h(0) \ \delta$$

Exceptionnellement les dérivées de la distribution δ seront notées δ', $\delta^{(k)}$:

(I. I. 7) $$< \delta^{(k)}(t-c), \ \varphi > = (-1)^k \ \varphi^{(k)}(c) \ .$$

---

(1) $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont de la même classe si l'intégrale de Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} | f_2 - f_1 | \, dt$ est nulle. Elles sont égales presque partout.

En comparant (I. I. 3) et (I. I. 2), on conclut que

$$\delta(t-c) = \frac{d}{dt} Y(t-c) \ .$$

Convergence.

On dit que des T_j de $(\mathcal{D}')$ convergent vers T de $(\mathcal{D}')$ si $\lim_{j\to\infty} < T_j - T, \varphi > = 0$ pour toute φ de $(\mathcal{D})$.

Une suite de fonctions localement sommables $f_j(t)$, non convergente au sens ordinaire, peut converger au sens des distributions. Pour cela, il faut et suffit que la suite des nombres $\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t)\, \varphi(t)$ soit convergente quelle que soit φ dans $(\mathcal{D})$. Bien entendu, la distribution limite n'est pas nécessairement (identique à) une fonction.

THEOREME - *Si des* T_j *convergent vers* T, *les* $\frac{d^k}{dt^k} T_j$ *convergent vers* $\frac{d^k}{dt^k} T$.

COROLLAIRE - Si une série de distributions est convergente la série obtenue par dérivation terme à terme est convergente.

Conséquence : La série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{int}$ est convergente au sens des distributions, pourvu que $|a_n| < |n|^k$, k entier ; car, le terme a_o mis à part, on l'obtient en dérivant k + 2 fois terme à terme la série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n n^{-k-2} e^{int}$ uniformément convergente au sens ordinaire, donc convergente au sens des distributions.

Multiplication [1].

Soit $\alpha(t)$ une fonction indéfiniment dérivable au sens ordinaire. On appelle *produit* de la distribution T *par* $\alpha(t)$ la distribution notée $\alpha(t)\,T$ définie par

(I. I. 8) $\qquad < \alpha(t)T, \varphi > = < T, \alpha\, \varphi > \ .$

Exemples :

$$\alpha(t)\,\delta = \alpha(o)\,\delta \ , \quad \alpha(t)\,\delta' = \alpha(o)\,\delta' - \alpha'(o)\,\delta \ , \quad e^{at}\,\delta'' = a^2\,\delta + 2a\delta' + \delta'' \ .$$

Convolution ou composition.

On dit qu'une distribution T est nulle dans un ensemble ouvert Ω de R si $< T, \varphi > = 0$ toutes les fois que $\varphi \in (\mathcal{D})$ a son support contenu dans Ω. On appelle *support* de T le plus petit ensemble fermé de R en dehors duquel T est nulle. T est à *support limité à gauche* si son support est contenu dans une demi-droite (c, $+\infty$), donc s'il existe un nombre réel c tel que $< T, \varphi > = 0$ pour toute φ dont le support est dans ($-\infty$, c). C'est le cas, par exemple, de la distribution $Y(t-c)\, f(t)$, si $f(t)$ est localement sommable, - ce qui explique

---

(1) Au sujet de la division, disons simplement que le quotient d'une distribution T par t est $S + c\delta$ tel que $t(S+c\delta) = T$; c étant arbitraire, il y a indétermination. Ex : le quotient de $T = f(t)$ est $f(t)/t + c\delta$.

l'emploi fréquent de la fonction de Heaviside. Il importe de remarquer que *ce n'est pas* une multiplication au sens ci-dessus, mais une simple notation où $Y(t-c)$ est inséparable : $Y(t-c)\ f(t)$ désigne la fonction égale à $f(t)$ pour $t > c$, et nulle pour $t < c$.

Soit $(\mathcal{D}'_+)$ l'espace vectoriel des distributions à support limité à gauche.

S et T étant deux éléments de $(\mathcal{D}'_+)$, on appelle *produit de convolution* ou de *composition* la distribution notée $S * T$ ou $T * S$ définie par

$$(I.\,I.\,9) \qquad \langle T * S,\ \varphi \rangle = \langle S * T,\ \varphi \rangle = \langle T, \psi_1(t) \rangle = \langle S,\ \psi_2(t) \rangle$$

où
$$\psi_1(t) = \langle S_u,\ \varphi(t+u) \rangle$$
$$\psi_2(t) = \langle T_u,\ \varphi(t+u) \rangle$$

pour toute $\varphi(t)$ de $(\mathcal{D})$.

On montre que, si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont localement sommables,

$$(I.\,I.\,10) \qquad Y(t)\ f_1(t) * Y(t)\ f_2(t) = Y(t) \int_0^t f_1(t-x)\ f_2(x)\ dx$$

on retrouve la composition ordinaire de Volterra.

Une des principales propriétés de la convolution est d'exprimer très simplement les dérivées des distributions :

$$(I.\,I.\,11) \qquad \frac{d^k}{dt^k} T = \delta^{(k)} * T \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\ .$$

Une autre propriété intéressante est la représentation de la translation par la convolution avec $\delta(t-c)$:

$$(I.\,I.\,12) \qquad \delta(t-c) * T_t = T_{t-c}$$

avec le sens $\langle T_{t-c}\ ,\varphi \rangle = \langle T_t,\ \varphi(t+c) \rangle$. En particulier :

$$\delta(t-c) * f(t) = f(t-c)\ .$$

Si S et T appartiennent à $(\mathcal{D}'_+)$, il en est de même de $S * T$, et comme $\delta * T = T * \delta = T$, l'espace vectoriel $(\mathcal{D}'_+)$ est une algèbre commutative, dont la convolution est la loi multiplicative et δ l'élément neutre.

THEOREME[1]- *L'algèbre $(\mathcal{D}'_+)$ n'a pas de diviseur de zéro.*

Distributions tempérées.

Soit $(\mathcal{S})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeur complexe $\varphi(t)$ de la variable réelle t, indéfiniment dérivables (au sens ordinaire) qui, pour $|t| \longrightarrow \infty$,

---

(1) $(\mathcal{D}'_+)$ est une algèbre sur le corps C des nombres complexes. Si S et $T \in (\mathcal{D}'_+)$, a et $b \in C$, alors $aS + bT \in (\mathcal{D}'_+)$ ainsi que $aS * bT = ab(S * T) = ab(T * S)$. La distribution nulle 0 est l'élément neutre pour la loi d'addition dans $(\mathcal{D}'_+)$: $T + 0 = T$. Le théorème (dû à Titchmarsh, cf Schwartz [1] ch. VI p. 29) signifie que $S * T = 0$ entraine soit $S = 0$, soit $T = 0$.

décroissent plus vite que toute puissance de $1/|t|$, ainsi que chacune de leurs dérivées. $(\mathcal{S})$ est muni de la topologie suivante : des φ_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{S})$ si, quels que soient les entiers ≥ 0 m et n, les $t^m \varphi_j^{(n)}(t) \longrightarrow 0$ uniformément sur R quand $j \longrightarrow \infty$.

Soit $(\mathcal{S}')$ le dual topologique de $(\mathcal{S})$. Les éléments de $(\mathcal{S}')$, fonctionnelles linéaires continues sur $(\mathcal{S})$, sont appelés *distributions tempérées*. $(\mathcal{S}')$ est contenu dans $(\mathcal{D}')$; mais toute distribution n'est pas tempérée. δ et ses dérivées, les fonctions sommables sont des distributions tempérées.

Un critère pratique est le théorème suivant[1] :

Pour qu'une distribution soit tempérée, il faut et suffit qu'elle soit une dérivée d'une fonction continue à croissance lente, c'est-à-dire qui est le produit de $(1+|t|^2)^{k/2}$ *par une fonction bornée sur R.*

Pour terminer, précisons qu'avec la multiplication et la convolution définies ci-dessus, si S et T appartiennent à $(\mathcal{S}')$, on ne peut assurer que $\alpha(t)T$ et $S * T$ y appartiennent aussi[2].

Les distributions tempérées sont les seules qui ont une image dans la transformation de Fourier. La transformation de Laplace est moins exigeante. Nous verrons qu'elle est applicable à une partie importante des distributions de $(\mathcal{D}_+)$ et qu'elle permet une extension du Calcul Symbolique.

II - PARTIES FINIES ET PSEUDO-FONCTIONS -

1/ Genre I. Définition.

Nous dirons qu'une fonction $g(t)$ est du genre I si elle est localement sommable sur (ε, ∞), $\varepsilon > 0$, et si, sur $(0, \varepsilon)$, elle s'écrit :

$$(\text{I. II. 1}) \qquad g(t) = \sum_{k=1}^{K} \left[a_k + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{kj} \log^j t \right] t^{-\nu_k} + \sum_{k=1}^{K} \left[b_k + \sum_{j=1}^{J} \beta_{kj}\, t \log^j t \right] t^{-k} + h(t)$$

ν_k réels ou complexes, mais *non* entier > 0, $h(t)$ mesurable et bornée sur $(0, \varepsilon)$.

Soit en particulier une fonction $g_1(t)$, du genre I, et s'écrivant sur $(0, \varepsilon)$

$$g_1(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k t^{-\nu_k} + \sum_{k=1}^{K} b_k t^{-k} + \beta_{12} \frac{\log t}{t} + h(t)$$

Considérons l'intégrale $J(\xi) = \int_{\xi}^{b} g_1(t)\, dt$. Si $0 < \xi < \varepsilon < b$,

---

(1) Schwartz [1] ch. VII th. VI.

(2) il faut pour cela des conditions supplémentaires ; voir Schwartz [1] ch. VII ou Martineau et Trèves.

$$J(\xi) = \int_{\xi}^{\epsilon} g_1(t)\,dt + \int_{\epsilon}^{b} g_1(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} a_k \int_{\xi}^{\epsilon} t^{-\nu_k}\,dt + \sum_{k=1}^{K} b_k \int_{\xi}^{\epsilon} t^{-k}\,dt +$$

$$+ \beta_{12} \int_{\xi}^{\epsilon} \frac{\log t}{t}\,dt + \int_{\xi}^{\epsilon} h(t)\,dt + \int_{\epsilon}^{b} g_1(t)\,dt = I(\xi) + F(\xi)$$

avec

$$I(\xi) = \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{\nu_k - 1}\,\xi^{-\nu_k+1} + \sum_{k=2}^{K} \frac{b_k}{k-1}\,\xi^{-k+1} - b_1 \log \xi - \frac{1}{2}\,\beta_{12} \log^2 \xi$$

et

$$F(\xi) = -\sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{\nu_k - 1}\,\epsilon^{-\nu_k+1} - \sum_{k=2}^{K} \frac{b_k}{k-1}\,\epsilon^{-k+1} + b_1 \log \epsilon +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\beta_{12} \log^2 \epsilon + \int_{\xi}^{\epsilon} h(t)\,dt + \int_{\epsilon}^{b} g_1(t)\,dt.$$

Lorsque $\xi \longrightarrow 0$, $I(\xi)$ n'a pas de limite, mais $F(\xi)$ en a une, $F(0)$. $F(0)$ est appelée la *partie finie* de l'intégrale $J(0)$ au sens de J. Hadamard [1]. On désigne $F(0)$ par la notation :

$$\mathrm{Pf} \int_{0}^{b} g_1(t)\,dt .$$

Nous venons de traiter le cas particulier d'une fonction du type $g_1(t)$; mais il montre la marche à suivre pour définir et calculer :

$$\mathrm{Pf} \int_{0}^{b} g(t)\,dt$$

$g(t)$ ayant la forme générale [2] (I. II. 1).

Si φ appartient à $(\mathcal{D})$, $g(t)\,\varphi(t)$ est aussi du genre I et on peut définir

$$\mathrm{Pf} \int_{0}^{b} g(t)\,\varphi(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{Pf} \int_{0}^{\infty} g(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

M. L. Schwartz[3] appelle "*pseudo-fonction*" la distribution notée $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t)$ définie par

$$\langle \mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t), \varphi \rangle = \mathrm{Pf} \int_{0}^{\infty} g(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

---

(1) voir Hadamard, Gilly, Méthée.

(2) Nous nous sommes abstenus de détailler le cas général où tous les α_{kj} et β_{kj} sont $\neq 0$, parce que les calculs sont assez compliqués et sans grand intérêt pour la suite.

(3) [1] ch. II.

$g(t)$ étant de genre I, nous poserons $\underset{t=0+}{\text{Pf.}}\ g(t) = h(0+)$ et

(I. II. 2) $\text{Pf}\,[\,g(t)\,]_0^b = \underset{t=0}{\text{Pf.}}\ g(t) - \underset{t=0+}{\text{Pf.}}\ g(t) = g(b) - h(0+)$.

Cette notation permet d'écrire commodément une généralisation de l'intégration par parties, si $g(t)$ a une dérivée $g'(t)$ dans (o, b) et si $g'(t)$ est elle-même de genre I.

$$\text{Pf} \int_0^{+b} g'\varphi \, dt = \text{Pf}\,[\,g(t)\,\varphi(t)\,]_0^b - \text{Pf} \int_0^{+b} g\varphi' \, dt$$

On en déduit, si $g(t)$ a, dans $(0, \infty)$, une dérivée $g'(t)$ de genre I,

$$\text{Pf} \int_0^{+\infty} g'\varphi \, dt = - h(0+)\,\varphi(0) - \sum_{k=1}^{K} \frac{b_k}{k!}\,\varphi^{(k)}(0) - \text{Pf} \int_0^{+\infty} g\varphi' \, dt$$

c'est-à-dire, au point de vue des distributions,

(I. II. 3) $$\frac{d}{dt}\,\text{Pf}\ Y(t)\,g(t) = \text{Pf}\ Y(t)\,g'(t) + h(0+)\,\delta + \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^k b_k \delta^{(k)}}{k!}$$

(les b_k sont toujours ceux de (I. II. 1)). Cette formule contient (I. I. 6) et les résultats de M. Schwartz :

$$\frac{d}{dt}\,\text{Pf}\ Y(t)\,\frac{1}{t^k} = -\,k\,\text{Pf}\ Y(t)\,\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{k!}\,\delta^{(k)}$$

$$\frac{d}{dt}\,Y(t)\,\log t = \text{Pf}\ Y(t)\,\frac{1}{t}$$

On déduit aussi de (I. II. 3)

$$\text{Pf}\ Y(t)\,g(t) = \frac{d}{dt}\,\text{Pf}\ Y(t)\,g^{(-1)}(t) + \sum p_i\,\delta^{(i)}$$

$g^{(-1)}(t)$ étant une primitive (au sens ordinaire) de $g(t)$ et les p_i des coefficients numériques en nombre fini. En répétant ce procédé, on trouve une primitive $g^{(-N)}(t)$ d'ordre N, *sans singularité* sur $(0, \infty)$ telle que :

(I. II. 4) $$\text{Pf}\ Y(t)\,g(t) = \frac{d^N}{dt^N}\,Y(t)\,g^{(-N)}(t) + \sum q_i\,\delta^{(i)}.$$

Pf a disparu du second membre ; mais cette représentation est surtout d'intérêt théorique.

2/ Genre II.

Nous dirons qu'une fonction $g(t)$ est du genre II si elle satisfait aux trois conditions :

1°/ $g(t)$ admet à l'origine la représentation (I. II. 1).

2°/ il existe un nombre *fini* de points singuliers t_n, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, tels que sur $(t_n - \varepsilon, t_n)$ $\varepsilon > 0$ assez petit

(I. II. 5) $$g(t) = \sum_{k=1}^{K} \left[a_{nk}^{-} + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{nkj}^{-} \log^j |t-t_n| \right] |t-t_n|^{-\nu_{nk}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \left[b_{nk} + \sum_{j=1}^{J} \beta_{nkj} (t-t_n) \log^j |t-t_n| \right] (t-t_n)^{-k} + h_n^{-}(t)$$

Re $\nu_{nk} > 0$, ν_{nk} *non* entier, $h_n^{-}(t)$ mesurable et bornée sur $(t_n - \varepsilon, t_n)$, tandis que sur $(t_n, t_n + \varepsilon)$

(I. II. 5') $$g(t) = \sum_{k=1}^{K} \left[a_{nk}^{+} + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{nkj}^{+} \log (t-t_n) \right] (t-t_n)^{-\nu_{nk}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \left[b_{nk} + \sum_{j=1}^{J} \beta_{nkj} (t-t_n) \log^j (t-t_n) \right] (t-t_n)^{-k} + h_n^{+}(t)$$

$h_n^{+}(t)$ mesurable et bornée sur $(t_n, t_n + \varepsilon)$; a_{nk}^{-} et a_{nk}^{+}, α_{nkj}^{-} et α_{nkj}^{+}, $h_n^{-}(t)$ et $h_n^{+}(t)$ sont différents ou non.

3°/ $g(t)$ est sommable dans les intervalles ouverts $0 < t < t_1, \ldots, \ldots, t_{n-1} < t < t_n, \ldots$ et localement sommable pour $t > t$.

Pour une telle $g(t)$, et, par exemple, $0 < A < t_1 < B < t_2$, on définit la partie finie d'intégrale de la manière suivante :

$$\mathrm{Pf} \int_A^{\cdot B} g(t)\,dt = -\,\mathrm{Pf} \int_{t_1}^{\cdot A} g(t)\,dt + \mathrm{Pf} \int_{t_1}^{\cdot B} g(t)\,dt$$

les deux dernières intégrales se ramenant au cas précédent au moyen d'une translation. On en déduit de proche en proche :

$$\mathrm{Pf} \int_A^{\cdot B} g(t)\,dt \qquad \text{pour} \quad 0 < A < t_1 < t_2 < \ldots < B \neq t_n$$

et

$$\mathrm{Pf} \int_0^{\cdot B} g(t)\,dt \qquad \text{pour} \quad B \neq t_n$$

Si φ appartient à $(\mathcal{D})$, et si $g(t)$ a une dérivée $g'(t)$ qui est aussi du genre II, on montre, sous l'hypothèse supplémentaire $h_n^{+} = h_n^{-}$ que :

$$\mathrm{Pf} \int_A^{\cdot B} g'\,\varphi\,dt = g(B)\,\varphi(B) - g(A)\,\varphi(A) - \mathrm{Pf} \int_A^{\cdot B} g\,\varphi'\,dt \qquad \begin{matrix} A \neq t_n \\ B \neq t_n \end{matrix} .$$

En faisant $B \longrightarrow \infty$, et tenant compte du paragraphe précédent, on a le résultat important :

(I. II. 6) $$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t) = \mathrm{Pf}\,Y(t)\,g'(t) + h(0+)\,\delta + \sum_{k=1}^{K} \frac{\cdots}{k!}$$

où les b_k et $h(0+)$ sont toujours ceux de (I. II. 1). La distribution $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t)$, telle que :

$$\langle \mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t),\ \varphi \rangle = \mathrm{Pf} \int_0^{\cdot \infty} g(t)\,\varphi(t)\,dt$$

s'appelle encore pseudo-fonction.

Si $g(t)$ est continue à droite de l'origine, on a simplement, si $h_n^{+} = h_n^{-}$

(I. II. 7) $$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t) = \mathrm{Pf}\,Y(t)\,g'(t) + g(0+)\,\delta$$

comme (I. I. 6). Cette simplicité vis-à-vis de (I. II. 3) vient de ce que les singularités sont ici *enjambées* .

On montre à l'aide de (I. II. 6) (ou de (I. II. 4)) que si $g(t)$ est du genre II (ou du genre I) et à *croissance lente* pour $t \longrightarrow \infty$, la distribution $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ est *tempérée* .

3/ Genre III.

Nous dirons qu'une fonction $g(t)$ est du genre III si elle satisfait aux trois conditions :

1°/ $g(t)$ est continue à droite de l'origine, ou bien admet dans son voisinage la représentation :

$$g(t) = \sum_{k=1}^{K} (a_k\ t^{-\nu_k} + b_k\ t^{-k}) + \beta_{11} \log t + h(t)$$

ν_k non entier > 0, $h(t)$ continue.

2°/ $g(t)$ est continue sur $(0, \infty)$, sauf en une *infinité dénombrable* de points t_n , $t_{n+1} > t_n > 0$, dans un voisinage desquels :

$$g(t) = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{c_{nm}}{(t - t_n)^m} + c_{no} \log |t - t_n| + h_n(t)$$

avec $h_n(t)$ continue dans ce voisinage, ν fixe et $|c_{nm}| < A\ t_n^k$ pour $n \geqq N$, N fixe, c_{no} et certains c_{nm} pouvant être nuls.

3°/ il existe des segments (S_n) : $|t - t_n| \leqq \alpha_n$ $0 < \beta \leqq \alpha_n < \alpha$, *extérieurs* deux à deux, hors desquels:

$$|g(t)| < A\ t^k \qquad t \geqq t_N$$

et dans lesquels $|h_n(t)| < A\ t^k \qquad t \geqq t_N$

les constantes A et k étant les mêmes pour tout $n \geqq N$.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer le théorème suivant :

Si $g(t)$ est du genre III, la pseudo-fonction $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ est la $(\nu+1)^{\text{ième}}$ dérivée au sens des distributions d'une fonction continue à croissance lente , donc $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ est une distribution tempérée. De plus, si φ est dans $(\mathcal{S})$,

$$\text{(I. II. 9)} \qquad \langle \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t),\ \varphi \rangle = \lim_{\xi \to \infty} \mathrm{Pf} \int_0^{\xi} g(t)\ \varphi(t)\ dt,$$

le point ξ étant assujetti à être *dans* la partie de l'intervalle $(t_n,\ t_{n+1})$ *extérieure* à (S_n) et à (S_{n+1}).

(I. II. 9) fait apparaitre une pseudo-fonction de genre III comme limite de pseudo-fonctions de genre II, nulles pour $t > \xi$.

Les pseudo-fonctions $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{\cos t}$, $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{\sin t}$, etc ... sont, par exemples, du genre III.

(I. II. 6 et 7) sont valables si $g(t)$ et $g'(t)$ sont du genre III.

Remarque.

Cette classification en trois genres n'absorbe pas toutes les pseudo-fonctions que la notion de partie finie d'intégrale permet de définir ; mais c'est sur des pseudo-fonctions de ces trois genres qu'on a commencé l'extension de la transformation de Laplace.

4/ Quelques propriétés.

Changement de variable.

La définition de la page 16 montre clairement que la partie finie d'une intégrale dépend étroitement de la variable. On peut toujours, certes, dans $\mathrm{Pf}\int_{b'}^{b} g(t)\,dt$ faire la translation $t = u - c$, mais en général tout autre changement de t en $t(u)$ ne laisse pas la partie finie *invariante*(1). Cependant on peut le faire dans des cas assez nombreux ; principalement, si $g(t)$ est du genre I *avec tous les* α_k, b_k *et* β_j *nuls* et si $t(u)$ est un homoémorphisme indéfiniment différentiable, ainsi que son inverse $u(t)$, on a(2) :

$$\mathrm{Pf}\int_{o}^{b} g(t)\,dt = \mathrm{Pf}\int_{u(o)}^{u(b)} g\,[t(u)]\;t'(u)\,du\ .$$

Dérivation par rapport à un paramètre.

b étant un paramètre *réel*, M.J. Hadamard observe(3) que

$$\frac{\partial}{\partial b}\,\mathrm{Pf}\int_{o}^{b}\frac{1}{(b-t)^{\nu}}\,dt = \mathrm{Pf}\int_{o}^{b}\frac{\partial}{\partial b}\,\frac{1}{(b-t)^{\nu}}\,dt$$

ν entier ou non. M. Hadamard a considéré le cas où ν est fractionnaire et s'est servi de cette propriété dans son ouvrage sur les équations aux dérivées partielles. Elle s'étend aisément aux pseudo-fonctions de genre II ou III.

Envisageons la dérivation sous un autre aspect. a étant un paramètre *complexe*, considérons une fonction $g(a;\ t)$ qui est du genre II si a est dans un domaine(4) (D) ; a n'influe pas sur les singularités de $g(a;\ t)$, mais dans les développements (I. II. 1) et (I. II. 5) les coefficients a_k, a_{nk}, α_{kj}, α_{nkj}, β_{kj}, β_{nkj}, ν_k, ν_{nk} et les fonctions $h(t)$ et $h_n(t)$ sont des fonctions de a. Supposons que pour tout a de (D),

1/ $g(a;\ t)$ a une *dérivée* $\frac{\partial}{\partial a}\,g(a;\ t)$ qui est aussi du genre II et continue en a et t dans les intervalles $(t_n - \varepsilon,\ t_n)$, $(t_n,\ t_n + \varepsilon)$;

---

(1) on a, par exemple, $\mathrm{Pf}\int_{o}^{b}\frac{dt}{t} = \log b$; en changeant t en u/2 on aurait :

$$\mathrm{Pf}\int_{o}^{2b}\frac{du}{u} = \log 2b\ ;$$

(2) Schwartz [1] ch. II.

(3) ouvrage cité à la bibliographie

(4) ouvert convexe. $g(a;\ t)$ peut être simplement du genre I, qui est contenu dans le genre II.

2/ $a_k(a)$, $a_{nk}(a)$, $\alpha_{kj}(a)$, $\alpha_{nkj}(a)$, $b_k(a)$, $b_{nk}(a)$, $\beta_{kj}(a)$, $\beta_{nkj}(a)$, $\nu_k(a)$ $\nu_{nk}(a)$ *dérivables ;*

3/ les $\nu_k(a)$ et $\nu_{nk}(a)$ ne sont *jamais égales* à 1 ;

4/ les $h(a;\ t)$ et $h_n(a;\ t)$ sont *dérivables* par rapport à a et leurs dérivées continues en a et t sont majorées en module par une fonction $B(t)$ sommable sur $(0,\ \infty)$.

Alors on a dans (D)

$$\text{(I. II. 10)} \qquad \frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Pf}\int_0^b g(a;\ t)\,dt = \mathrm{Pf}\int_0^b \frac{\partial}{\partial a}\,g(a;\ t)\,dt\ ,$$

b pouvant être l'∞.

Prolongement analytique.

Considérons une fonction $g(a;\ t)$ qui, pour a (complexe) dans un domaine (E) est du genre I et qui, plus précisément, s'écrit au voisinage de l'origine, sur $(0,\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,

$$g(a;\ t) = \sum_{k=1}^{K}\left[a_k(a) + \sum_{j=1}^{J}\alpha_{kj}(a)\ \log^j t\right] t^{-\nu_k(a)} + h(a;\ t)$$

et faisons les hypothèses suivantes :

1/ $a_k(a)$, $\alpha_{kj}(a)$, $\nu_k(a)$ sont holomorphes dans (E) ; $\frac{\partial}{\partial a}h(a;\ t)$ $(0 \leq t \leq \varepsilon)$ et $\frac{\partial}{\partial a}g(a;\ t)$ $(t > \varepsilon)$ sont continues par rapport à a et t ;

2/ aucun des $\nu_k(a)$ *n'est égal à 1* dans (E) ;

3/ quel que soit a dans (E), $|h(a;\ t)|$ et $|\frac{\partial}{\partial a}h(a;\ t)|$ sont majorées par une fonction $B(t)$ sommable sur $(0, \varepsilon)$;

4/ quel que soit a dans (E), on a, pour $t > \varepsilon$, $|\frac{\partial}{\partial a}g(a;\ t)| < C(t)$, fonction sommable.

Supposons en outre que, pour $a \in (E_1) \subset (E)$ et pour *tout* k, $\mathrm{Re}\ \nu_k(a) < 1$, tandis que, pour $a \in (E_2) \subset (E)$, $\mathrm{Re}\ \nu_k(a) \geqslant 1$. Donc l'intégrale :

$$\int_0^\infty g(a;\ t)\,dt = \gamma(a)$$

existe et est holomorphe dans (E_1). On montre aisément que (1) :

THEOREME - *La fonction $\gamma(a)$ est prolongeable dans (E_2) et on a :*

$$\text{(I. II. 11)} \qquad \gamma(a) = \mathrm{Pf}\int_0^\infty g(a;\ t)\,dt \qquad\qquad a \in (E_2)$$

Nous donnerons au chapitre III, paragraphe III, une application de cet important théorème.

---

(1) ce théorème contient celui de L. Schwartz [1] ch. II. La démonstration est semblable.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DE LAPLACE ET DISTRIBUTIONS

Définition.

Soit T_t une distribution de $(\mathcal{D}'_+)$, donc à support limité à gauche. La fonction de la variable complexe p [1]

(II. 1) $$L(p) = \langle T_t, e^{-pt} \rangle$$

est l'*image* de T_t dans la transformation de Laplace.

Existence - THEOREME I : *$L(p)$ existe, s'il existe un nombre réel ξ'_o tel que, pour tout $\xi > \xi'_o$, $e^{-\xi t}\, T$ soit une distribution tempérée. Alors $L(p)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan* $\mathrm{Re}\ p > \xi'_o$.

Ce théorème est une conséquence de celui-ci[2] :

Si la distribution T_t de $(\mathcal{D}'_+)$ est telle qu'il existe un nombre réel ξ'_o tel que, pour tout $\xi > \xi'_o$, la distribution $e^{-\xi t}\, T$ soit tempérée, la fonction:

$$\Phi(p) = \langle e^{-\xi t} T\ ,\ e^{-pt} \rangle$$

est holomorphe pour $\mathrm{Re}\ p > o$.

En effet, si $\mathrm{Re}\ p > o$, on peut trouver une fonction $\varphi_p(t)$ de $(\mathcal{S})$ qui coincide avec e^{-pt} sur un voisinage du support de T et à laquelle on peut appliquer $e^{-\xi t}\ T_t \in (\mathcal{S}')$, $\xi > \xi'_o$, donc $\Phi(p)$ existe. $\varphi_p(t)$ est une fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathcal{S})$ et $e^{-\xi t}\ T_t$ est une application linéaire continue sur $(\mathcal{S})$, donc $\Phi(p)$ est holomorphe. On passe au théorème I en posant $\Phi(p-\xi) = L(p)$ car $L(p) = \langle e^{-\xi t}\ T_t\ ,\ e^{-(p-\xi)\, t} \rangle$ d'après (I. I. 8).

Notation.

On traduit la transformation de Laplace par les symboles :

$$L(p) = \mathcal{L}\ (T)$$

$$T \sqsupset L(p) \quad \text{ou} \quad L(p) \sqsubset T \qquad \mathrm{Re}\ p > \xi_o\ .$$

---

(1) e^{-z} est l'exponentielle habituelle.

(2) abrégé du théorème de Schwartz de [3] - voir aussi [2].

La distribution T est l'*original* de la fonction $L(p)$, et ξ_o, le plus petit des nombres ξ'_o, est *l'abscisse limite de convergence.*

Cette conception de la transformation de Laplace contient la notion classique sur laquelle est fondé le Calcul Symbolique ordinaire. D'après celle-ci, l'image d'une fonction continue par morceaux $Y(t)\ h(t)$ est l'intégrale :

$$H(p) = \int_o^\infty h(t)\ e^{-pt}\ dt \quad ;$$

elle est convergente et $H(p)$ est holomorphe pourvu que Re p soit supérieure à un certain nombre ξ_c. Et $H(p)$ n'est autre que $< Y(t)\ h(t),\ e^{-pt} >$!

On montre facilement les relations suivantes qui généralisent les propriétés les plus connues du Calcul Symbolique

$$T \quad \sqsupset \quad L(p) \qquad \text{Re } p > \xi_o$$

$$S \quad \sqsupset \quad K(p) \qquad \text{Re } p > \xi_1$$

(II. 2) $$T + aS \quad \sqsupset \quad L(p) + aK(p) \qquad \text{Re } p > \sup\ (\xi_o,\ \xi_1)$$

(II. 3) $$T_{t-c} \quad \sqsupset \quad e^{-cp}\ L(p) \qquad c \text{ réel}$$

(II. 4) $$e^{at}\ T \quad \sqsupset \quad L(p-a) \qquad a \text{ complexe, Re } p > \xi_o + \text{Re } a$$

(II. 5) $$t\ T \quad \sqsupset \quad -\ L'(p) \qquad \text{Re } p > \xi_o$$

(II. 6) $$\frac{d^k}{dt^k}\ T \quad \sqsupset \quad p^k\ L(p) \qquad \text{Re } p > \xi_o$$

(II. 7) $$S * T \quad \sqsupset \quad K(p)\ L(p) \qquad \text{Re } p > \sup\ (\xi_o,\ \xi_1)$$

Comme

$$\delta \quad \sqsupset \quad 1, \quad \delta^{(k)} \quad \sqsupset \quad p^k \quad \text{et} \quad \delta(t-c) \quad \sqsupset \quad e^{-cp}$$

on voit que (II. 3) et (II. 6) sont des conséquences de (II. 7), (I. I. 12) et (I. I. 11).

(II. 7) généralise le théorème de Borel qu'on retrouve en faisant $T = Y(t)\ h_1(t)$ et $S = Y(t)\ h_2(t)$, les fonctions $h_1(t)$ et $h_2(t)$ étant continues. En particulier si $Y(t)\ h(t) \quad \sqsupset \quad H(p)$

$$Y(t) * Y(t)\ h(t) = \int_o^t h(u)\ du \quad \sqsupset \quad \frac{1}{p}\ H(p)$$

relation bien connue en Calcul Symbolique[1].

(II. 6) donne, d'après (I. I. 6),

$$Y(t)\ h'(t) + h(o)\ \delta \quad \sqsupset \quad p\ H(p) \quad ;$$

---

(1) La convolution $Y(t) * T$ donne la seule primitive (au sens des distributions de T qui ait son support limité à gauche.

d'où, en retranchant $h(o)\ \delta$ du premier membre et son image du second,

$$Y(t)\ h'(t) \sqsupset p\ H(p) - h(o)\ ,$$

relation également bien connue en Calcul Symbolique ordinaire.

Terminons ce court exposé par un théorème sur les séries de distributions. M. L. Schwartz nous l'a communiqué et nous laisserons au lecteur le soin d'en retrouver la démonstration.

THEOREME II [1] - *Soit* $T = \sum_{o}^{\infty} T_n$, *les distributions* T_n *ayant toutes leur support sur une même demi-droite* (c, ∞). *Si, pour chaque* $\xi > \xi_o$ *toutes les* $e^{-\xi t}\ T_n$ *sont tempérées et si, pour toute* φ *de* $(\mathcal{S})$, *la série* $\sum_{o}^{\infty} \langle e^{-\xi t}\ T_n, \varphi \rangle$ *converge, alors* $e^{-\xi t}\ T$ *est une distribution tempérée et*

$$T \sqsupset \sum_{o}^{\infty} L_n(p) \qquad \text{avec} \quad T_n \sqsupset L_n(p)\ .$$

Critère pratique.

Si les T_n sont égales à $D^k\ f_n(t)$, D^k opérateur différentiel [2] d'ordre fini k, $f_n(t)$ fonctions localement sommables, et si $\sum_{o}^{\infty} |f_n(t)|$ converge uniformément sur tout intervalle fini et est majorée par $e^{\xi t} \times$ polynôme en t, alors T est tempérée et

$$T \sqsupset \sum_{o}^{\infty} L_n(p)\ .$$

---

(1) voir la réciproque au chapitre IV, et aussi le théorème VI du chapitre V.

(2) $D^k = a_k \frac{d^k}{dt^k} + \ldots + a_1 \frac{d}{dt} + a_o$, les a étant des constantes.

CHAPITRE III

TRANSFORMATION DE LAPLACE ET PSEUDO-FONCTIONS

I - RELATIONS PRINCIPALES -

Tout le chapitre II s'applique aux pseudo-fonctions. Mais par leur caractère spécial, ces distributions ont des images de Laplace qui satisfont à des relations plus riches et plus maniables que celles des distributions en général.

Définition

Soit $g(t)$ une fonction donnée telle qu'il existe un nombre réel ξ_o tel que $e^{-\xi_o t} g(t)$ soit

- ou bien des genres I ou II et à croissance lente quand $t \longrightarrow +\infty$
- ou bien du genre III.

alors (cf. page 19) la pseudo-fonction $e^{-\xi_o t}\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) = \mathrm{Pf}\ Y(t)\, e^{-\xi_o t} g(t)$ est une distribution tempérée et d'après le chapitre II $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ a une image de Laplace qui est une fonction $G(p)$ holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}\ p > \xi_o$ et définie de manière unique par

$$G(p) = \langle \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t),\ e^{-pt} \rangle = \mathrm{Pf} \int_o^{\infty} g(t)\ e^{-pt}\ dt\ ,$$

la *partie finie* ayant toujours le sens donné au chapitre I.

On résume encore cette correspondance entre $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ et $G(p)$ par

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) \sqsupset G(p) \qquad \mathrm{Re}\ p > \xi_o\ .$$

On remarquera que l'holomorphie de $G(p)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}\ p > \xi_o$ peut être établie directement à l'aide de ce qui est indiqué page 20.

Afin d'écrire sous des formes condensées les relations principales nous allons introduire des constantes spéciales en même temps qu'une extension de la notion d'intégrale.

Définition des Qf.

Si la fonction continue $F^{(-1)}(x)$, primitive de la fonction $F(x)$, peut s'écrire, pour $x > X$,

$$F^{(-1)}(x) = \sum_1^J (A_j + B_j \log^j x) x^{\mu j} + \sum_1^N C_n \log^n x + C_o + \frac{1}{x} H(x)$$

où aucun des μ_j n'est nul, $H(x)$ bornée et telle que $H(z)$ soit holomorphe[1] pour $\mathrm{Re}\ z > X$, *on posera*

$$\mathrm{Qf}\int_{\rho}^{\infty} F(x)\,dx = -F^{(-1)}(\rho) + \underset{\infty}{\mathrm{Qf}}.\ F^{(-1)}(x)$$

$$\underset{\infty}{\mathrm{Qf}}.\ F^{(-1)}(x) = \sum_{0}^{K} C_n\, Q_n$$

avec $Q_0 = 1$ $\quad Q_1 = -\gamma$ $\quad (= 0,577\ldots,$ constante d'Euler)

$$Q_2 = \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6} \qquad Q_3 = -\gamma\left(\gamma^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) + \psi''(1)$$

$$Q_n = -\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \Gamma^{(i)}(1)\, Q_{n-i} \qquad (2)$$

Il est clair que si $F^{(-1)}(x)$ a une limite quand $x \longrightarrow \infty$, $\underset{\infty}{\mathrm{Qf}}.\ F^{(-1)}(x)$ est égal à cette limite. Si $F^{(-1)}(x)$ croît plus vite que toute puissance de x, on prendra $\underset{\infty}{\mathrm{Qf}}.\ F^{(-1)}(x) = 0$.

Cela posé, des formules du chapitre II et de la deuxième partie du chapitre I, on déduit les suivantes où c est un nombre réel et α un nombre complexe quelconques.

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) \supset G(p) \qquad \mathrm{Re}\ p > \xi_0$$

(III. 1) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) + \alpha\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_1(t) \supset G(p) + \alpha\ G_1(p)$ $\quad \mathrm{Re}\ p > \sup(\xi_0, \xi_1)$

(III. 2) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t-c)\ g(t-c) \supset e^{-cp}\ G(p)$ $\quad \mathrm{Re}\ p > \xi_0$

(III. 3) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ e^{at}\ g(t) \supset G(p-\alpha)$ $\quad \mathrm{Re}\ p > \xi_0 + \mathrm{Re}\ \alpha$

(III. 4) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^n\ g(t) \supset (-1)^n\ G^{(n)}(p)$ $\quad \mathrm{Re}\ p > \xi_0$

(III. 5) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \dfrac{g(t)}{t} \supset \mathrm{Qf}\int_{\rho}^{\infty} G(x)\,dx$

(III. 6) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \dfrac{g(t)}{t+b} \supset e^{bp}\int_{\rho}^{\infty} e^{-bx}\ G(x)\,dx, \qquad b > 0$

(III. 7) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g'(t) \supset p\ G(p) - h(0) - \sum_{k=1}^{K} b_k\ \dfrac{(-1)^k\ p^k}{k!}$

(III. 8) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\left[\mathrm{Pf}\int_{0}^{t} g(u)\,du\right] \supset \dfrac{1}{p}\ G(p) - \dfrac{1}{p}\sum_{k=2}^{K} b_k\ \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)(k-1)!}\ p^{k-1}$

(III. 9) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\left[\mathrm{Pf}\int_{0}^{t} \dfrac{g(u)}{u}\,du\right] \supset \dfrac{1}{p}\ \mathrm{Qf}\int_{\rho}^{\infty} G(x)\,dx - \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{K} b_k\ \dfrac{(-1)^k}{k.\ k!}\ p^k$

(III. 10) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) * \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_1(t) \supset G(p)\ G_1(p)$ $\quad \mathrm{Re}\ p > \sup(\xi_0, \xi_1)$

---

(1) de sorte que $\frac{1}{p}H(p)$ est l'image d'une fonction sommable.

(2) $\Gamma(x)$ fonction eulérienne de seconde espèce; $\psi(x)$ sa dérivée logarithmique. Les $\binom{n}{i} = n!/i!(n-i)!$ sont les nombres de l'analyse combinatoire.

La formule (III. 2) permet de se ramener toujours au cas où le support est (o, ∞), ce qui simplifie les calculs. Par exemple si $\mathrm{Pf}\ Y(t-b)\ g_2(t)$ (de support (b, ∞)) a l'image $G_2(p)$, on déduit la correspondance

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_2(t+b) = \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) \sqsupset e^{bp}\ G_2(p)\ .$$

Dans (III. 7, 8 et 9) les notations sont celles de (I. II. 1).

Le produit de convolution qui figure dans (III. 10) est, conformément à (I. I. 9), défini par :

$$< \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) * \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_1(t),\ \varphi(t) > =$$

$$= \mathrm{Pf} \int_o^\infty g(t)\ [\ \mathrm{Pf} \int_o^\infty g_1(u)\ \varphi(u+t)\ du\ ]\ dt \qquad \varphi \in (\mathcal{D})\ .$$

Changement de t en at, a constante complexe.

En Calcul Symbolique ordinaire, on a le théorème suivant :

Si h(z) est une fonction holomorphe dans un angle (A) contenant le demi-axe réel $x \geq o$ et si

$$Y(t)\ h(t) \sqsupset H(p)\ ,$$

on a

(III. 11) $$Y(t)\ h(at) \sqsupset \frac{1}{a}\ H(\frac{p}{a})$$

pourvu que la droite at, $o \leq t < \infty$, soit dans (A) et que :

$$|\ h(z)\ e^{-\frac{p}{a}z}| \longrightarrow o(\frac{1}{|z|}) \qquad |z| \longrightarrow \infty \ \text{dans (A)}\ (1)\ .$$

A cause de l'impossibilité de changer de variable sous $\mathrm{Pf} \int$, (III. 11) ne s'étend pas en général aux images des pseudo-fonctions. Par exemple, en l'appliquant à :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} \sqsupset -\log p - \gamma$$

on obtiendrait :

$$\frac{1}{a}\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} \sqsupset -\frac{1}{a}\ (\log p + \gamma - \log a)$$

manifestement absurde.

Il est cependant de nombreux cas où (III. 11) s'étend. En particulier, si $g(t) = t^{-\nu}\ h(t)$, ν non entier négatif, $h(z)$ holomorphe dans un angle (A) défini ci-dessus, et si :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) \sqsupset G(p)\ ,$$

alors, pour a tel que la droite at, $o \leq t < \infty$, soit dans (A),

---

(1) pratiquement, a est réel $> o$, ce qui dispense de ces conditions

(III. 12) $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(at) \sqsupset \frac{1}{a}\, G(\frac{p}{a})$

C'est une conséquence du prolongement analytique dont nous parlerons au paragraphe 3 ci-après.

Dérivation par rapport à un paramètre.

Soit a un paramètre réel ou complexe. Si :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(a;\ t) \sqsupset G(a;\ p)$$

on a $\quad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{\partial}{\partial a}\, g(a;\ t) \sqsupset \frac{\partial}{\partial a}\, G(a;\ p)$

pourvu que $g(a;\ t)$ remplisse les conditions indiquées page 20. (Le Pf peut être inutile dans l'une des correspondances).

Exemples :

1/ En posant $r = \sqrt{p^2 + a^2}$ et $\log C = \gamma$, on a [1] :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t^2}\, J_0(at) \sqsupset p \log \frac{C}{2}\,(p+r) - r$$

En dérivant par rapport à a, il vient :

$$-\frac{1}{t}\, J_1(at) \sqsupset -\frac{a}{p+r} \ .$$

2/ De [2]

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t^{\nu+1}} \sqsupset \Gamma(-\nu)\ p^{\nu} \qquad \nu \text{ non entier} \geq 0$$

on déduit en dérivant par rapport à ν :

$$-\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{\log t}{t^{\nu+1}} \sqsupset \Gamma(-\nu)\ p^{\nu}\ [\log p - \psi(-\nu)] \ .$$

II - PASSAGE DE L'IMAGE DE $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$ A CELLE DE $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(it)$ -

Si l'angle (A) dont il est question page 29 contient la partie positive de l'axe imaginaire, (III. 11) donne :

$$Y(t)\ h(it) \sqsupset \frac{1}{i}\, H(\frac{p}{i})$$

On passe ainsi des images de $Y(t)\ sh\ t$ et de $Y(t)\ J_n(t)$ à celles de $Y(t)\ sin\ t$ et de $Y(t)\ I_n(t)$. Mais très souvent (A) ne contient pas l'axe imaginaire ; $h(it)$ a des singularités et n'a pas d'image au sens du Calcul Symbolique ordinaire. Cependant, la pseudo-fonction $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ h(it)$ peut avoir une image au sens du Calcul Symbolique des distributions, soit $H_1(p)$. Y a-t-il une relation simple entre $H(p)$ et $H_1(p)$? La réponse est dans le théorème suivant qui complète le paragraphe 3, partie II du chapitre I.

---

(1) voir nos tables, fonctions de Bessel

(2) voir nos tables 65 et 69.

THEOREME (1) :

Soit $g(z)$ une fonction satisfaisant aux trois conditions :

1/ $g(z)$ est holomorphe au voisinage de l'origine, ou y admet la représentation

$$g(z) = \sum_{k=1}^{K} (a_k z^{-\nu_k} + b_k z^{-k}) + \beta_{11} \log z + h(z)$$

ν_k non entier > 0, b_k pouvant être nul, $h(z)$ holomorphe.

2/ $g(z)$ est analytique, uniforme ou non, dans le domaine (D) : $\mathrm{Re}\, z > -\alpha$, $\mathrm{Im}\, z > -\alpha$, $\alpha > 0$. Elle est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Im}\, z > -\alpha$, et sur l'axe $y > 0$, sauf en une infinité dénombrable de points $z = iy_n$, $y_{n+1} > y_n > 0$ au voisinage desquels elle s'écrit :

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{c_{nm}}{(z-iy_n)^m} + c_{no} \log(z-iy_n) + h_n(z)$$

$h_n(z)$ étant holomorphe et $|h_n(z)| < A|z|^k$ dans ce voisinage, ν indépendant de n, et $|c_{no}|$ et $|c_{nm}| < A\, y_n^k$ pour $n \geq N$ fixé.

3/ Il existe des cercles (C_n) : $|z-iy_n| \leq \alpha_n$, $0 < \beta \leq \alpha_n < \alpha$, extérieurs deux à deux, tels que $|g(z)| < A|z|^k$, lorsque z est dans (D), mais hors des (C_n). Les constantes A et k sont les mêmes pour tous les $n \geq N$.

On a alors les propriétés suivantes :

a) Les pseudo-fonctions $\mathrm{Pf}\, Y(t)\, g(t)$ et $\mathrm{Pf}\, Y(t)\, g(it)$ (t réel) ont des images de Laplace, respectivement $G(p)$ et $G_1(p)$, qui existent (2) pour $\mathrm{Re}\, p > 0$.

b) La fonction $G(p)$ est prolongeable dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, p < 0$.

c) On a, pour $\mathrm{Re}\, p > 0$ et $\mathrm{Im}\, p > 0$,

$$G_1(p) = \frac{1}{i} G\left(\frac{p}{i}\right) - \pi \left(\frac{1}{2} r_o + \sum_{n=1}^{\infty} r_n\right) \qquad \text{(III. 13)}$$

r_n est le résidu de $g(z)\, e^{ipz}$ en iy_n et r_o le résidu à l'origine.

Ajoutons quelques remarques :

D'après (I. II. 9)

$$G_1(p) = \lim_{\xi \to \infty} \mathrm{Pf} \int_0^{\xi} g(iy)\, e^{-py}\, dy$$

le point $i\xi$ étant astreint à être dans la partie de l'intervalle (iy_n, iy_{n+1}) *extérieure* à (C_n) et à (C_{n+1}).

Les conditions 2/ et 3/ assurent la convergence de la série des r_n.

Si $g(z)\, e^{ipz}$ avait des pôles pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$, on ajouterait au second membre de (III. 13) le produit par 2π de la somme des résidus relatifs à ces pôles.

---

(1) nous laisserons au lecteur le soin de retrouver la démonstration ; voir notre note aux C.R. de l'Académie des Sciences (1957) t. 244 pages 991-993.

(2) chapitre III, paragraphe 1. $G(p)$, par exemple, pourra exister pour $\mathrm{Re}\, p > \xi_o$, $\xi_o \leq 0$; nous nous limitons ici à $\mathrm{Re}\, p > 0$ pour abréger nos énoncés.

Le théorème suppose que, pour t réel, $g(t)$ est du genre I et à croissance lente, et $g(it)$ du genre III. Il est évidemment valable si $g(it)$ est du genre I ou II et à *croissance lente* (pour satisfaire aux conditions 2/ et 3/) ; il n'y a plus qu'un nombre fini de r_n dans (III. 13).

Il y aura toujours intérêt à mettre $G(p/i)$ sous la forme $G(pe^{-i\frac{\pi}{2}})$.

Nous allons donner deux applications simples de cette méthode de passage de :

$$\mathcal{C}[\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)] \quad \text{à} \quad \mathcal{C}[\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(it)] \ .$$

Premier exemple (fonctions de Bessel[1]).

On veut obtenir l'image de $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{I_0(t)}{t}$ à partir de :

$$(1) \qquad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{J_0(t)}{t} \sqsupset -\arg sh\ p - \gamma + \log 2 = -\log \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2+1}\right) - \gamma \qquad \mathrm{Re} > 0$$

le logarithme étant réel en même temps que p. Le théorème ne s'applique pas à $\frac{I_0(t)}{t}$ qui n'est pas à croissance lente ; mais il s'appliquera à $e^{-t}\ \frac{I_0(t)}{t}$. On prendra donc $g(z) = e^{iz}\ \frac{J_0(z)}{z}$. D'après (1) :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ e^{it}\ \frac{J_0(t)}{t} \sqsupset -\log \frac{1}{2}\left(p - i + \sqrt{p^2-2ip}\right) - \gamma \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

Le résidu de $e^{iz}\ \frac{J_0(z)}{z}\ e^{ipz}$ à l'origine étant 1, (III. 13) donne :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ e^{-t}\ \frac{J_0(it)}{it} \sqsupset \frac{1}{i}\ L(pe^{-i\pi/2}) - \gamma - \frac{\pi}{2} \qquad \begin{matrix}\mathrm{Re}\ p > 0 \\ \mathrm{Im}\ p > 0\end{matrix}$$

où $$L(pe^{-i\pi/2}) = -\log \frac{1}{2}\left(pe^{-i\pi/2} - i + \sqrt{p^2e^{-i\pi} - 2p}\right)$$

$$= -\log \frac{1}{2}\left(p + 1 + \sqrt{p^2+2p}\right) + i\,\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ e^{-t}\ \frac{I_0(t)}{t} \sqsupset -\log \frac{1}{2}\left(p + 1 + \sqrt{p^2+2p}\right) - \gamma \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

par prolongement à tout le demi-plan $\mathrm{Re}\ p > 0$; puis enfin, en vertu de (III. 3)

$$(2) \qquad \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{I_0(t)}{t} \sqsupset -\log \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) - \gamma \qquad \mathrm{Re}\ p > 1$$

Mais il est juste de remarquer que ce n'est pas ici la meilleure méthode. En effet (1) est un cas particulier de

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{J_0(at)}{t} \sqsupset -\arg sh\ \frac{p}{a} - \gamma + \log \frac{2}{a} \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a| \ .$$

---

(1) voir nos tables.

Si on fait $a = i$ on trouve :

$$\text{Pf } Y(t)\ \frac{J_o(it)}{t} \rightrightarrows -\arg sh\ \frac{p}{i} - \gamma + \log 2 - i\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{Re } p > 1$$

puis (2).

Second exemple.

On cherche à obtenir l'image de $\text{Pf } Y(t)\ \frac{b}{\sin bt}$, $b > o$, à partir de :

$$\text{Pf } Y(t)\ \frac{b}{sh\ bt} \rightrightarrows -\psi\left(\frac{p}{2b} + \frac{1}{2}\right) - \gamma - \log 2b \qquad \text{Re } p > -b$$

$b/sh\ bz$ satisfait aux conditions du théorème ; elle a ses singularités (pôles) aux points $z = in\,\frac{\pi}{b}$, $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ et les résidus de $\frac{b}{sh\ bz}\,e^{ipz}$ y sont $r_n = (-e^{-p\pi/b})^n$. La série des r_n converge bien pour $\text{Re } p > o$ et (III. 13) conduit à :

$$\text{Pf } Y(t)\ \frac{b}{\sin bt} \rightrightarrows -\psi\left(\frac{-ip}{2b} + \frac{1}{2}\right) - \gamma - \log 2b - i\,\frac{\pi}{2}\,th\,\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}\ .$$

L'habitude veut qu'on ne fasse pas figurer l'imaginaire i dans les images ; on écrira par exemple :

$$\text{Pf } Y(t)\ \frac{b}{\sin bt} \rightrightarrows -\log\frac{b}{2} - 2p\sum_{j=o}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\,\frac{p}{p^2 + (2j+1)^2 b^2}$$

Nous reviendrons sur cette correspondance au chapitre IV.

III - EMPLOI DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE -

Le théorème de prolongement analytique de la page 21 s'applique, moyennant quelques conditions supplémentaires, aux images de Laplace. On en déduit le théorème particulier suivant, d'un emploi fréquent, où le paramètre a de la page 21 est remplacé par ν pour rejoindre des notations classiques.

THEOREME -

Soient $g(\nu;\ t)$ une fonction de t (réel) et ν un paramètre complexe variant dans un domaine (E) où sont satisfaites les hypothèses suivantes :

1/ pour $t \geq \varepsilon$, $g(\nu;\ t)$ et $\frac{\partial}{\partial\nu}\,g(\nu;\ t)$ sont continues par rapport à l'ensemble $\nu,\ t$; $|g(\nu;\ t)| < t^N$, $|\frac{\partial}{\partial\nu}\,g(\nu;\ t)| < t^N$, N fixe

2/ pour $o < t \leq \varepsilon$ $\quad g(\nu;\ t) = \sum_{k=o}^{K} a_k(\nu)\ t^{\mu(\nu)+k} + h(\nu;\ t)$

3/ les $a_k(\nu)$ et $\mu(\nu)$ sont holomorphes et $\mu(\nu)$ n'égale jamais un entier ≤ -1 ;

4/ $h(\nu;\ t)$ et $\frac{\partial}{\partial\nu}\,h(\nu;\ t)$ sont continues par rapport à l'ensemble ν, t et majorées en module par $B(t)$, sommable sur $(o,\ \varepsilon)$.

Alors,

a) pour Re $\mu(\nu) > -1$, $Y(t)\ g(\nu;\ t)$ *a une image au sens du Calcul Symbolique ordinaire, soit* $G(\nu;\ p)$ [1] *; pour* Re $\mu(\nu) \leq -1$, ν *dans* (E), Pf $Y(t)\ g(\nu;\ t)$ *a une image au sens des pseudo-fonctions ;*

b) $G(\nu;\ p)$ *est holomorphe par rapport à* ν *dans* (E) ;

c) pour tout ν *dans* (E), *on a*

(III. 14) $$\text{Pf}\ Y(t)\ g(\nu;\ t) \sqsupset G(\nu;\ p)$$

le Pf *étant inutile si* Re $\mu(\nu) > -1$.

La formule (III. 14) découle de (I. II.11).

Un exemple d'application

On trouve dans les tables courantes (fonctions de Bessel [2])

$$Y(t)\ K_\nu(at) \sqsupset -\frac{\pi}{2\ \sin\ \nu\pi}\ \frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^\nu - \left(\frac{S}{a}\right)^\nu\right]$$

$-1 < \text{Re}\ \nu < +1$ Re $p >$ − Re a

on en déduit, d'après le théorème,

$$\text{Pf}\ Y(t)\ K_\nu'(at) \sqsupset -\frac{\pi}{2\ \sin\ \nu\pi}\ \frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^\nu - \left(\frac{S}{a}\right)^\nu\right]$$

$\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$ Re $p >$ − Re a

L'intérêt de ce théorème est de donner directement des images de pseudo-fonctions à l'aide d'images déjà connues et portées sur les tables du Calcul Symbolique ordinaire. Cette méthode, très simple et très fructueuse, a servi M. Gilly dans les premiers essais de généralisation de la transformation de Laplace au moyen des parties finies d'intégrales ; il a obtenu ainsi les images de Pf $Y(t)\ 1/t^\nu$ et Pf $Y(t)\ J_{-\nu}(t)$, Re $\nu > 1$, ν *non* entier. Mais la nécessité que $\mu(\nu)$ ne soit pas égale à un entier négatif est une lourde hypothèse.

Changement de t en bt.

Si $g(\nu;\ t)$ satisfait aux conditions du théorème, on déduit de la conclusion a) que, b étant une constante réelle,

$$Y(t)\ g(\nu;\ bt) \sqsupset \frac{1}{b}\ G\left(\nu;\ \frac{p}{b}\right) \qquad \nu \in (E) \text{ et } \text{Re}\ \mu(\nu) > -1.$$

On en déduit par prolongement

(III. 15) $$\text{Pf}\ Y(t)\ g(\nu;\ bt) \sqsupset \frac{1}{b}\ G\left(\nu;\ \frac{p}{b}\right) \qquad \nu \in (E) \text{ et } \text{Re}\ \mu(\nu) \leq -1.$$

Pour ces pseudo-fonctions l'homothétie [3] se traduit de la même façon qu'en Calcul Symbolique ordinaire. On remarquera encore que, si de plus $h(\nu;\ o) = o$, (I. II. 3) et (III. 7) se réduisent à

---

(1) $G(\nu;\ p)$ existe, bien entendu, pour Re p supérieure à un nombre qui dépend de ν, ou non.

(2) $s = \sqrt{p^2 - a^2}$, $S = p + s$

(3) En modifiant les hypothèses, on passe aisément de (III. 15) à (III. 12).

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(\nu;\,t) = \mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,g(\nu;\,t)$$

et $$\mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,g(\nu;\,t) \sqsupset p\,G(\nu;\,p)$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ désignant comme toujours la dérivée ordinaire. Bref, le Calcul Symbolique des pseudo-fonctions de la forme $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,t^{-\nu}\,h(t)$ (page 29) prolonge *directement* le Calcul Symbolique ordinaire.

IV - EMPLOI DES FORMULES OPERATOIRES -

Les formules (III. 5, 6 et 9), l'emploi de $\mathrm{Qf}\int$ et des Q_i ont un caractère nettement artificiel. M. Paul Delerue a proposé une méthode plus élémentaire.

Considérons $g(t)$ qui est, par exemple, du genre I et l'image $G(p)$ de $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,g(t)$. Il existe alors une fonction $k(t)$, somme de termes de la forme $\frac{1}{t^\nu}$ ou $\frac{\log^j t}{t^\nu}$, ν entier ou non et > -1, telle que $\frac{g(t) - k(t)}{t}$ soit *continue* sur $(0, \infty)$. Il est facile d'obtenir les images $K(p)$ et $K_1(p)$ de $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,k(t)$ et $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{k(t)}{t}$, sommes de pseudo-fonctions élémentaires. On a d'ailleurs

$$Y(t)\,[\,g(t) - k(t)\,] \sqsupset G(p) - K(p)\ .$$

On est ramené au Calcul Symbolique ordinaire ; d'après les règles de celui-ci[1]

$$Y(t)\,\frac{g(t) - k(t)}{t} \sqsupset \int_p^\infty [\,G(x) - K(x)\,]\,dx$$

Or, le premier membre n'est autre que $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{g(t)}{t} - \mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{k(t)}{t}$ donc

$$\mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{g(t)}{t} \sqsupset \int_p^\infty [\,G(x) - K(x)\,]\,dx + K_1(p)\ ,$$

formule qui joue le même rôle que (III. 5) sans appel à des notions nouvelles d'intégrale généralisée.

Voici une application très simple de ce procédé. On cherche l'image de $\mathrm{Pf}\,Y(t)\,\frac{J_0(at)}{t}$. De l'image bien connue de $Y(t)\,J_0(at)$ on déduit :

$$Y(t)\,[\,J_0(at) - 1\,] \sqsupset \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} - \frac{1}{p}$$

d'où

$$Y(t)\,\frac{J_0(at) - 1}{t} \sqsupset \int_p^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{x}\right] dx = -\,\mathrm{arg\,sh}\,\frac{p}{a} + \log p - \log\frac{a}{2}$$

---

(1) voir Humbert et Colombo, Parodi.

et enfin

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{J_0(at)}{t} \sqsupset -\ arg\ sh\ \frac{p}{a} - log\ \frac{a}{2} - \gamma\ ,$$

puisque : $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} \sqsupset -\ log\ p - \gamma$.

L'idée directrice de M. Delerue est de compléter les pseudo-fonctions par des pseudo-fonctions élémentaires (aux images connues !) pour obtenir de bonnes fonctions auxquelles s'applique tout le Calcul Symbolique ordinaire. On peut ainsi mettre au service du Calcul Symbolique des Pf les très nombreuses formules "opératoires" données par MM. Pierre Humbert et Louis Poli dans le fascicule CXIII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*(1). Ces formules se résument dans le schéma suivant :

A étant un opérateur, si $Y(t)\ h(t)$ et $Y(t)\ A.h(t)$ sont continues et ont des images, on a :

$$Y(t)\ A.(t) \sqsupset B.H(p)$$

où $H(p)$ est l'image de $Y(t)\ h(t)$ et B un opérateur lié à A. On en déduit pour les pseudo-fonctions le procédé suivant :

Si $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) \sqsupset G(p)$

et si $k(t)$ est telle que $g(t) - k(t)$ et $A.\ [\ g(t) - k(t)\ ]$ soient toutes les deux *continues* sur (o, ∞), on a

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ A.\ g(t) \sqsupset B\ [\ G(p) - K(p)\ ] + K_1(p)\ ,$$

avec $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ k(t) \sqsupset K(p)$ et $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ A.k(t) \sqsupset K_1(p)$.

Voici une application voisine de ce procédé.

On sait qu'avec la notation ci-dessus (2)

$$Y(t)\ h(t^2) \sqsupset \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_o^{+\infty} x^{-3/2} H\left(\frac{1}{x}\right)\ exp\left(-\frac{p^2}{4}x\right)\ dx\ .$$

Prenons $h(t) = \frac{sin\ 2\sqrt{bt}}{t} - 2\sqrt{\frac{b}{t}}$, $b > o$. Etant donné que (3)

$$Y(t)\ h(t) \sqsupset \pi\ erf\ \sqrt{\frac{b}{p}} - 2\sqrt{\pi\ \frac{b}{p}}$$

$$Y(t)\ h(t^2) \sqsupset -\ p\ Arc\ tg\ \frac{2\sqrt{b}}{p} - 2\sqrt{b}\ \left[\frac{1}{2}\ log(p^2+4b) - log\ p - 1\ \right]\ ,$$

---

(1) ces formules, établies dans la notation de Carson, sont entachées d'erreurs typographiques peu visibles, mais faciles à corriger.

(2) ici A est le changement de t en t^2.

(3) voir nos tables.

la formule ci-dessus permet d'écrire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{erf\ \sqrt{bx}}{x^{3/2}} - \frac{\sqrt{b}}{x} \right) \exp\left(-\frac{p^2}{4} x\right) dx = -p\ Arc\ tg \frac{2\sqrt{b}}{p} - 2\sqrt{b} \left[\frac{1}{2} \log(p^2+4b) - \log p - 1 \right],$$

ou, en remplaçant x par t et p par $2\sqrt{p}$,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{erf\ \sqrt{bt}}{t^{3/2}} - \frac{\sqrt{b}}{t} \right) e^{-pt}\, dt = -2\sqrt{p}\ Arc\ tg \sqrt{\frac{b}{p}} - \sqrt{b}\,[\log(p+b) - 2 - \log p\,] .$$

Or on sait que :

$$\sqrt{b}\ Pf \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-pt} dt = -\sqrt{b}\,(\log p + \gamma) ,$$

donc :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ Pf \int_0^{\infty} \frac{erf\ \sqrt{bt}}{t^{3/2}} e^{-pt}\, dt = -2\sqrt{p}\ Arc\ tg \sqrt{\frac{b}{p}} - \sqrt{b}\,[\log(p+b) - 2 + \gamma\,] .$$

Ce qui donne l'image de : $Pf\ Y(t) \dfrac{erf\ \sqrt{bt}}{t^{3/2}}$.

CHAPITRE IV

INVERSION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

I - THEOREMES ET METHODE DE SCHWARTZ -

Etant donnée une fonction $F(p)$ de la variable complexe p, sous quelles conditions existe-t-il une *distribution* T qui soit l'*original* de $F(p)$ dans la transformation de Laplace, - qui soit telle que :

$$F(p) \sqsubset T \ ?$$

Et peut-il en exister plus d'une ? Ces questions ont leur réponse dans ces théorèmes de M. L. Schwartz[1].

THEOREME I -

Pour que $F(p)$ soit l'image d'une distribution T de $(\mathcal{D}'_+)$ il faut et suffit qu'il existe un demi-plan $\mathrm{Re}\ p > \xi_o$ dans lequel $F(p)$ soit holomorphe et majorée en module par un polynôme en $|p|$.

THEOREME II -

Si $F(p)$ est identiquement nulle dans un demi-plan $\mathrm{Re}\ p > \xi_o$, elle n'a pas d'autre original que la distribution nulle.

Il s'ensuit qu'une fonction satisfaisant au théorème I a un *seul* original.

Recherche de l'original.

Soit m le degré du polynôme en $|p|$ qui majore $|F(p)|$ pour $\mathrm{Re}\ p > \xi_o$. D'après le théorème II, $\frac{F(p)}{p^{m+2}}$ a pour original une distribution unique. Puisque $|\frac{F(p)}{p^{m+2}}|$ est majoré par $A/|p|^2$ (A nombre) lorsque $|p| \longrightarrow \infty$, il existe d'après la théorie[2] de la transformation de Laplace ordinaire une *fonction continue* unique $h(t)$ telle que :

$$\frac{F(p)}{p^{m+2}} = \int_o^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt \quad ;$$

$h(t)$ est donnée par la transformation de Mellin-Fourier (intégrale de Bromwich-Wagner[2]) :

---

(1) 3 et 2 VI.

(2) voir page suivante.

(IV. 1) $$h(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{F(p)}{p^{m+2}} e^{tp}\, dp \,, \qquad \xi > \xi_o \,.$$

On a donc (cf. page 24) au sens ordinaire comme au sens des distributions :

$$\frac{F(p)}{p^{m+2}} \sqsubset h(t) \,.$$

On en déduit, en vertu de (II. 4),

(IV. 2) $$F(p) \sqsubset \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} h(t)$$

qui donne l'original de $F(p)$ sous la forme d'une dérivée $(m+2)$ ième au sens des distributions. Le plus souvent, la fonction $h(t)$ sera, sauf en certains points isolés, dérivable au sens ordinaire jusqu'à l'ordre $(m+2)$, et en s'aidant de (I. II. 3) ou de (I. II. 6) on pourra écrire (IV. 2) sous une forme plus intéressante :

(IV. 3) $$F(p) \sqsubset \mathrm{Pf}\ f(t) + S$$

$f(t)$ étant une fonction continue presque-partout (ou partout ou localement sommable, Pf étant inutile dans ces deux cas), et S une somme de distributions ponctuelles, du type $\delta^{(k)}(t-c)$, $0 \leq k \leq m+1$.

Donnons pour fixer les idées un exemple très simple. Soit à chercher l'original de

$$F(p) = (e^{bp} + p^3)\, \frac{e^{-bp}}{p^2} \,, \qquad b > 0 \,, \qquad \mathrm{Re}\ p > 0 \,.$$

On peut prendre ici $m = 1$, et :

$$h(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} (e^{bp}+p^3)\, \frac{e^{-bp}}{p^5}\, e^{tp}\, dp \,, \qquad \xi > 0$$

vaut, d'après la méthode des résidus, $\frac{t^4}{4!} + t - b$, si $t > b$, $\frac{t^4}{4!}$ si $0 < t < b$, et zéro si $t < 0$. Autrement dit, $h(t) = Y(t)\frac{t^4}{4!} + Y(t-b)(t-b)$, et c'est bien une fonction continue. D'après (IV. 2) :

$$F(p) \sqsubset \frac{d^3}{dt^3}\left[Y(t)\frac{t^4}{4!} + Y(t-b)(t-b) \right] = \frac{d^2}{dt^2}\left[Y(t)\frac{t^3}{3!} + Y(t-b) \right] = \frac{d}{dt}\left[Y(t)\frac{t^2}{2} + \delta(t-b) \right]$$

d'où, enfin :

---

(2) voir Parodi, - Humbert et Colombo, - Angot. La notation signifie que l'intégrale est prise, dans le plan complexe, le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point d'abscisse ξ quelconque mais $> \xi_o$.

$$(e^{b\phi} + p)\frac{e^{b\phi}}{p^2} \sqsubset Y(t)t + \delta'(t-b)$$

ce qui serait apparu immédiatement si on avait écrit $F(p)$ sous la forme $\frac{1}{p^2} + e^{-b\phi}\, p$.

Cette méthode, capitale au point de vue théorique, est surtout utile dans le cas où (IV. 1) est calculable par la méthode des résidus. Si on sait à l'avance, par exemple par des tables, que $F(p)/p^n$ est une image de Laplace au sens ordinaire et qu'elle a $k(t)$ pour original, il suffit d'écrire :

$$F(p) \sqsubset \frac{d^n}{dt^n}\, k(t)$$

pour retrouver (IV. 3).

Exemple : $F(p) = p \log p$. Puisque $Y(t) \log t \sqsupset -\frac{\log p + \gamma}{p}$ on a :

$$\frac{F(p)}{p^2} = \frac{\log p}{p} \sqsubset -Y(t) \log t - \gamma\, Y(t)$$

$$F(p) \sqsubset -\frac{d^2}{dt^2}\left[Y(t) \log t + \gamma\, Y(t)\right]$$

d'où, d'après (I. II. 3) et la formule de la page 13

$$F(p) \sqsubset -\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Pf}\, Y(t)\frac{1}{t} + \gamma\, \delta\right]$$

puis

$$p \log p \sqsubset \mathrm{Pf}\, Y(t)\frac{1}{t^2} - (\gamma - 1)\,\delta'$$

résultat(1) qu'on pourrait déduire presque immédiatement de la correspondance(2)

$$\mathrm{Pf}\, Y(t)\frac{1}{t^2} \sqsupset p(\log p + \gamma - 1) \quad , \qquad \mathrm{Re}\, p > 0 \quad .$$

---

(1) On a d'ailleurs $\log p \sqsubset -\mathrm{Pf}\, Y(t)\, 1/t - \gamma\,\delta$. En partant de l'intégrale (IV. 1), M. S. Colombo (Annales des Télécomm. T. 8 N° 4 1953) obtient une extension de la notion d'original différente de celle de M. Schwartz ; il trouve ainsi que l'original de $\log p$ est $-1/t$, $t > 0$, original *égal* au nôtre pour $t > 0$. En suivant M. Colombo, on serait conduit à un C. S. où l'image de $1/t$ serait $-\log p$; il ne semble pas qu'il existe actuellement de théorie de dérivation permettant de concilier ce fait avec ces deux-ci : $Y(t) \log t \sqsupset \frac{-\log p - \gamma}{p}$, et $\log t$ a pour dérivée ordinaire $1/t$.

(2) voir notre table.

Remarques sur les pseudo-fonctions.

D'après le théorème II, si la fonction $F(p)$ est l'image d'une pseudo-fonction $\mathrm{Pf}\ g(t)$, elle a pour original *toute* la classe, - et *seulement* la classe - des pseudo-fonctions $\mathrm{Pf}\ f(t)$, telles que $f(t)$ soit presque partout égale à $g(t)$ (voir page12). Cette propriété généralise le théorème de Lerch [1]: *Si deux fonctions ont la même image, elles coincident partout où elles sont continues.*

Si $F(p)$ est l'image d'une pseudo-fonction, on a évidemment $S = o$ dans (IV. 3).

II - GENERALISATION DE LA METHODE DE HEAVISIDE -

THEOREME III -

Si la série $\sum_{o}^{\infty} F_n(p)$ *est uniformément convergente pour* $\mathrm{Re}\ p > \xi_1$, *a pour somme la fonction holomorphe* $F(p)$, *et si pour* $\mathrm{Re}\ p \geq \xi_2 > \xi_1$,

$$\sum_{o}^{\infty} |F_n(p)| \leq C\,|p|^{k} \qquad (C,\ k \text{ constantes} > o)$$

alors

$$F(p) \sqsubset \sum_{o}^{\infty} T_n \quad ,$$

si la distribution T_n *est l'original de* $F_n(p)$.

Pratiquement on cherchera à décomposer $F(p)$, pour $|p| \longrightarrow \infty$ en une somme de monômes p^{ν}, $p^{\nu}\ log^{j} p$, $p^{-\nu}$, etc..., dont les originaux sont connus.

Cherchons par exemple l'original de $arg\ sh\ \frac{p}{a}$. On a[2], pour $|\frac{p}{a}| > 1$,

$$arg\ sh\ \frac{p}{a} = log\ 2 - log\ a + log\ p - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\ \left(\frac{a}{p}\right)^{2n}$$

Or

$$log\ \frac{2}{a} \sqsubset log\ \frac{2}{a}\ \delta$$

$$log\ p \sqsubset -\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} - \gamma\ \delta$$

$$\frac{(-1)^n}{2n}\ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\ \left(\frac{a}{p}\right)^{2n} \sqsubset Y(t)\ \frac{(-1)^n\ a^{2n}}{n!\ n!\ 2^{2n}}\ t^{2n-1} \qquad n \geq 1$$

donc

$$arg\ sh\ \frac{p}{a} \sqsubset -\ (log\ \frac{a}{2} + \gamma)\ \delta - \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} - Y(t)\ \frac{1}{t}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ n!}\ \left(\frac{at}{2}\right)^{2n}$$

soit

$$arg\ sh\ \frac{p}{a} \sqsubset -\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{J_o(at)}{t} - (log\ \frac{a}{2} + \gamma)\ \delta$$

---

(1) Parodi 1957 page 48.

(2) car $(arg\ sh\ z)' = \frac{1}{z}\ (1+\frac{1}{z^2})^{-1/2}$ et $arg\ sh\ x - log\ x \longrightarrow log 2$ quand $x \longrightarrow +\infty$

en accord avec la correspondance citée pages 32 et 35.

Il est avantageux dans certains cas de développer $F(p)$ suivant les images de $Y(t) \sin nt$, $Y(t) \cos nt$, multipliées par une puissance de p : on obtient l'original sous une forme qui rappelle les séries de Fourier.

Considérons par exemple :

$$A(p) = -\log \frac{b}{2} - 2p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \frac{p}{p^2+(2j+1)^2 b^2} \quad , \quad b > 0, \quad \mathrm{Re}\ p > 0 \ .$$

Cette fonction satisfait aux conditions du théorème III, et, puisque :

$$\frac{p}{p^2 + (2j+1)^2 b^2} \sqsubset Y(t) \cos (2j+1) bt \quad ,$$

on a :

$$(1) \qquad A(p) \sqsubset -(\log \frac{b}{2})\, \delta - 2 \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} Y(t) \frac{\cos(2j+1)bt}{2j+1}$$

La série est bien convergente au sens distributionnel, d'après ce qu'on a rappelé page 13. On sait d'ailleurs que :

$$2 \sum \frac{\cos(2j+1)bt}{2j+1} = \log(\cot g \frac{bt}{2}) \qquad 0 < t < \frac{\pi}{b} \ ;$$

on peut montrer que les fonctions $2 \sum_{0}^{\infty} Y(t) \frac{\cos(2j+1)bt}{2j+1}$ et $Y(t) \log |\cot g \frac{bt}{2}|$, localement sommables et égales presque-partout, représentent la même distribution, et (1) s'écrit :

$$(2) \qquad A(p) \sqsubset -(\log \frac{b}{2})\, \delta - \frac{d}{dt} Y(t) \log |\cot g \frac{bt}{2}| \ .$$

Au voisinage de l'origine :

$$\log |\cot g \frac{bt}{2}| = -\log |t| - \log \frac{b}{2} - \frac{b^2 t^2}{12} + \ldots$$

et la formule (I. II. 6) donne :

$$\frac{d}{dt} Y(t) \log |\cot g \frac{bt}{2}| = -(\log \frac{b}{2})\, \delta - \mathrm{Pf}\ Y(t) \frac{b}{\sin bt} \ ,$$

de sorte que (2) se réduit à :

$$(3) \qquad A(p) \sqsubset \mathrm{Pf}\ Y(t) \frac{b}{\sin bt} \quad .$$

On retrouve la correspondance de la page 33.

CHAPITRE V

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES IMAGES DES DISTRIBUTIONS ET DES PSEUDO-FONCTIONS

I - GENERALISATION DES THEOREMES ABELIENS -

Si la fonction $Y(t)\ h(t)$ est localement intégrable au sens de Riemann et à croissance lente quand $t \longrightarrow \infty$, et si $Y(t)\ h(t) \sqsupset H(p)$, $\mathrm{Re}\ p > 0$, les *théorèmes abéliens*(1) du Calcul Symbolique ordinaire assurent que, x étant réel et $\nu > -1$:

1/ s'il existe une constante A telle que :

$$\left| \frac{h(t)}{t^{\nu}} - A \right| \longrightarrow 0 \quad , \qquad t \longrightarrow 0+$$

alors

(V. 1) $$\left| \frac{x^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} H(x) - A \right| \longrightarrow 0 \quad , \qquad x \longrightarrow \infty \quad ;$$

2/ s'il existe une constante A telle que :

$$\left| \frac{h(t)}{t^{\nu}} - A \right| \longrightarrow 0 \quad , \qquad t \longrightarrow \infty$$

alors

(V. 2) $$\left| \frac{x^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)} H(x) - A \right| \longrightarrow 0 \quad , \qquad x \longrightarrow 0+ \quad .$$

Nous allons donner une extension de ces théorèmes aux distributions.

Il est facile - nous en laissons le soin au lecteur - d'établir les lemmes suivants :

LEMME I -

Si une distribution tempérée T_1 a son support dans (b, ∞) $b > 0$, son image $U_1(p)$ est telle que $U_1(x) \longrightarrow 0$ plus vite que $e^{-b'x}$, $0 < b' < b$, quand $x \longrightarrow \infty$.

LEMME II -

Si une distribution T_2 est à support borné, son image $U_2(p)$ est une fonction entière de p.

En combinant ces lemmes et les théorèmes abéliens, on obtient les théorèmes :

---

(1) ch. V de Widder (qui considère des intégrales de Stieljès). Voir aussi S. Colombo (Ann. des Téléc.). Parodi (1957) donne des pages intéressantes sur le comportement des images à l'infini.

THEOREME I -

Soit $U(p)$ *l'image d'une distribution* T *dont le support est* (o,∞) *et telle que* $e^{-\xi_o t}\ T$ (ξ_o *réel*) *est tempérée. Si dans un voisinage de l'origine* T *est égale à une fonction mesurable* $\alpha(t)$ *et s'il existe deux constantes* A *et* ν *telles que :*

$$\left| \frac{\alpha(t)}{t^{\nu}} - A \right| \longrightarrow o \qquad t \longrightarrow o+,\ \nu > -1,$$

alors

(V. 3) $$\left| \frac{x^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\ U(x) - A \right| \longrightarrow o\ , \qquad x \longrightarrow \infty\ .$$

THEOREME II -

Soit $U(p)$ *l'image d'une distribution* T *de* $(\mathcal{D}'_+)$ *et telle que* $e^{-\xi_o t}\ T$ (ξ_o *réel*) *est tempérée. Si, pour* t *assez grand,* T *est égale à une fonction mesurable* $\alpha(t)$ *et s'il existe deux constantes* A *et* ν *telles que :*

$$\left| \frac{\alpha(t)}{t^{\nu}} - A \right| \longrightarrow o \qquad t \longrightarrow \infty,\ \nu > -1\ ,$$

alors

(V. 4) $$\left| \frac{x^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\ U(x) - A \right| \longrightarrow o\ , \qquad x \longrightarrow o+\ .$$

Ces deux théorèmes sont applicables en particulier aux images des pseudo-fonctions $Pf\ Y(t)\ g(t)$, la fonction $g(t)$ étant à croissance lente, ou décroissante, quand $t \longrightarrow \infty$.

Considérons par exemple la correspondance :

$$Pf\ Y(t)\ \frac{1}{(t-b)^2} \sqsupset p\ e^{-bp}\ Ei^*(bp) - \frac{1}{b} = G(p) \qquad Re\ p > o \qquad b > o$$

$$Ei^*(bp) = \gamma + \log b + \log p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bp)^n}{n.n!}$$

Lorsque $t \longrightarrow \infty$, $1/(t-b)^2 \longrightarrow 1/t^2 \longrightarrow o$; on peut appliquer le théorème II avec $\nu = o$, $A = o$, et (V. 4) affirme alors que $xG(x) \longrightarrow o$ quand $x \longrightarrow o+$. Ce qu'on vérifie immédiatement.

Lorsque $t \longrightarrow o+$, $1/(t-b)^2 \longrightarrow 1/b^2$; on peut donc appliquer le théorème I avec $\nu = o$, $A = 1/b^2$, et (V. 3) affirme alors que $xG(x) \longrightarrow 1/b^2$; ce qui s'accorde avec le développement asymptotique de $e^{-bx}\ Ei^*(bx)$

$$\frac{1}{bx} + \frac{1!}{b^2x^2} + \frac{2!}{b^3x^3} + \frac{3!}{b^4x^4} + \ldots$$

II - COMPORTEMENT A L'INFINI DES IMAGES DE PSEUDO-FONCTIONS -

Si la fonction $g(t)$ n'est pas, au voisinage de l'origine, intégrable au sens de Riemann, le théorème I ne donne aucun renseignement sur le comportement à l'infini de l'image de $Pf\ Y(t)\ g(t)$.

En s'appuyant sur le théorème I, les images de $Pf\ Y(t)\ \frac{1}{t^{\mu}} \log^k t$, k entier ≥ 0, μ entier ou non, et la définition des Qf_{∞} donnée au chapitre III, le lecteur pourra établir le théorème suivant :

THEOREME III -

Soit $U(p)$ l'image d'une distribution T dont le support est (o,∞) et telle que $e^{-\xi_o t}\ T$ (ξ_o réel) est tempérée. Si pour $o < t < b$ T est égale à une fonction

$$\sum_{k=1}^{K} \left[a_k + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{kj} \log^j t \right] t^{-\mu_k} + h(t)$$

où les μ_k sont entiers ou non, et $h(t)$ mesurable et bornée sur (o,b), et si $U^{(n)}(p)$ est la $n^{ième}$ dérivée ordinaire de $U(p)$, on a :

$$(V.5) \qquad Qf_{\infty}\ U^{(n)}(x) = 0 \qquad\qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

T peut être une pseudo-fonction de genre I, II ou III.

Exemple

$$Pf\ Y(t)\ \frac{J_o(t)}{t^2} \sqsupset p \log \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2+1}) - \sqrt{p^2+1} + \gamma p = A(p)$$

Comme pour x grand,

$$\log \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1}) = \log x + \frac{1}{4x^2} + \ldots$$

on vérifie que :

$$Qf_{\infty}\ A(x) = 0$$

$$Qf_{\infty}\ A'(x) = 0$$

$$Qf_{\infty}\ A''(x) = 0\ , \qquad \text{etc.....}$$

Le théorème V est utile lorsque les images sont obtenues par des équations différentielles et connues à une constante additive près.

III - UNE EGALITE -

On montre en Calcul Symbolique ordinaire que, si $Y(t)\ h(t)$ a pour image $H(p)$, on a l'*égalité*

$$(V.6) \qquad \int_o^{+\infty} \frac{h(t)}{t}\, dt = \int_o^{+\infty} H(x)\, dx$$

pourvu que $\frac{h(t)}{t}$ soit intégrable au sens de Riemann sur (o,∞) (l'existence du second membre découle alors des théorèmes abéliens). Cette condition n'est pas souvent remplie. En recourant aux intégrales généralisées en Pf et Qf, on obtient un résultat plus étendu.

On démontre en effet le lemme et le théorème suivants :

LEMME III -

Soient T_3 *une distribution de support* (b,c), $o < b < c < \infty$, *et* $t\,T_3 \sqsupset V_3(p)$. *On a :*

$$(V.7) \qquad < T_3,\ 1 > = \int_o^\infty V_3(x)\,dx \quad .$$

THEOREME IV -

Soit $g(t)$ *une fonction du genre II. Si, au voisinage de l'origine :*

$$g(t) = h_1(t) + \sum_1^I \alpha_i / t^{\mu_i}$$

$|h_1(t)| < A\,t^a$, $a > o$, μ_i *entier* $\geqq o$ *ou quelconque avec* $\mathrm{Re}\ \mu_i \geqq o$; *si, pour* t *assez grand,*

$$g(t) = h_2(t) + \sum_1^K \gamma_k\, t^{\mu_k}$$

$|h_2(t)| < A/t^a$, $a > o$, μ_k *entier* $\geqq o$ *ou quelconque avec* $\mathrm{Re}\ \mu_k \geqq o$; *et si* $\mathrm{Pf}\ Y(t)\,g(t) \sqsupset G(p)$, *alors*

$$(V.8) \qquad \underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} \frac{g(t)}{t} dt = \underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} G(x)\,dx \ .$$

Par définition

$$\underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} f(u)\,du = \mathrm{Pf} \int_o^{u_o} f(u)\,du + \mathrm{Qf} \int_{u_o}^\infty f(u)\,du$$

$f(u)$ n'ayant aucune singularité pour $u \geqq u_o$, sauf à l'infini.

Premier exemple (pris dans le Calcul Symbolique ordinaire !)

$$Y(t)\ (t-b) \sqsupset \frac{1 - bp}{p^2} \quad , \quad b > 0,\ \mathrm{Re}\ p > 0$$

On a bien

$$\underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} \frac{t - b}{t}\,dt = b\,\gamma = \underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} \frac{1 - bx}{x^2}\,dx$$

conformément avec (V.8).

Deuxième exemple

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t) = \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b}{t(t-b)} \sqsupset -e^{-bp}\,Ei^*(bp) + \log p + \gamma = G(p)$$

$b > 0$, $\mathrm{Re}\ p > 0$.

$$\underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} \frac{g(t)}{t} dt = \frac{1}{b} \underset{\mathrm{Pf}}{\overset{\mathrm{Qf}}{\int_o^\infty}} \left(\frac{-b}{t^2} + \frac{1}{t-b} - \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{b} \left\{ -\log b + \underset{\infty}{\mathrm{Qf}}\, [\log(t-b) - \log t] \right\} = -\frac{\log b}{b}$$

car $\underset{\infty}{Qf}.\ [\log(t-b) - \log t\,] = \underset{\infty}{Qf}.\ \log\left(1 - \frac{b}{t}\right) = 0.$

On a ensuite

$$\underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty} G(x)\,dx = \underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty} -e^{-bx}\,Ei^*(bx)\,dx =$$

$$= \underset{\infty}{Qf}.\left[\frac{1}{b}\,e^{-bx}\,Ei^*(bx)\right] - \underset{t=o}{Pf}.\left[\frac{1}{b}\,e^{-bx}\,Ei^*(bx)\right] - \underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty}\frac{dx}{bx}$$

après intégration par parties. D'après ce qui a été rappelé page 46

$$\underset{\infty}{Qf}.\left[\frac{1}{b}\,e^{-bx}\,Ei^*(bx)\right] = 0\ ,$$

$$\underset{t=o}{Pf}.\left[\frac{1}{b}\,e^{-bx}\,Ei^*(bx)\right] = \frac{\gamma + \log b}{b}\ ,$$

et comme $\underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty}\frac{1}{bx}\,dx = \frac{1}{b}\,Q_1 = -\frac{\gamma}{b}$

on trouve bien $\underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty} G(x)\,dx = -\frac{\log b}{b} = \underset{Pf}{Qf}\int_o^{+\infty}\frac{g(t)}{t}\,dt$

en accord avec (V.8).

IV - CONVERGENCE DES IMAGES ET DES ORIGINAUX -

Si des distributions T_j, convergent vers T, les images respectives $L_j(p)$ convergent-elles vers $L(p)$, image de T? que peut-on dire de cette convergence ? Inversement, à quelles conditions doit-on astreindre les $L_j(p)$ pour que leurs originaux convergent ?

En s'appuyant sur les propriétés des distributions tempérées rappelées page15,on démontrera le théorème suivant dont le théorème II du Chapitre II est un corollaire :

THEOREME V -

Pour que les fonctions $L_j(p)$, images de distributions tempérées(1) T_j, *convergent vers zéro uniformément sur tout compact du demi-plan* $\mathrm{Re}\ p > 0$, *lorsque* $j \longrightarrow j_o$, *j parcourant un ensemble dénombrable ou non, il suffit que soient satisfaites les trois conditions suivantes :*

- *les T_j ont leurs supports dans une même demi-droite (c,∞) ;*
- *$T_j = D^k f_j(t)$, D^k opérateur différentiel d'ordre fini k, les $f_j(t)$ étant des fonctions localement sommables et toutes majorées en module par $C\,t^N$ $(N > 0)$ quand $t \longrightarrow \infty$;*
- *les $f_j(t) \longrightarrow 0$ uniformément sur tout intervalle fini, lorsque $j \longrightarrow j_o$.*

Inversement(2) .

---

(1) si les T_j ne sont pas tempérées, on considèrera les $e^{-\xi_o t}\,T_j$ rendues tempérées par le choix de ξ_o. Un compact est une ensemble fermé borné du plan complexe. Pour D^k voir page 25.

(2) abrégé du théorème donné par L. Schwartz [3] page 203.

THEOREME VI -

Pour que les distributions T_j, *à supports dans* (c,∞) *originaux des fonctions* $L_j(p)$ *toutes holomorphes pour* $\mathrm{Re}\ p \geq 0$, *convergent vers zéro dans* $(\mathcal{S}')$, *il suffit que soient satisfaites les deux conditions suivantes :*

- sur toute bande $\xi_1 < \mathrm{Re}\ p < \xi_2$, $\xi_1 > 0$, *les* $L_j(p)$ *sont toutes majorées en module par* $C\,|p|^N$, $N > 0$;

- sur tout compact du demi-plan $\mathrm{Re}\ p \geq 0$, *les* $L_j(p)$ *convergent vers zéro uniformément lorsque* $j \longrightarrow j_o$

Ce théorème a pour corollaire le théorème III du Chapitre IV.

On remarquera au sujet du théorème V qu'il ne suffit pas que $g_n(t)$ tende[1] vers $g(t)$ pour que l'image de $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_n(t)$ tende vers celle de $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$. Par exemple, l'image de $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^{-1+1/n}$, qui est $\frac{\Gamma(1/n)}{p^{1/n}}$, ne tend pas, quand $n \longrightarrow \infty$, vers l'image de $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^{-1}$, qui est $-\log p - \gamma \cdot t^{-1+1/n}$ tend bien vers t^{-1}, mais les conditions du théorème V ne sont pas remplies, car $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^{-1+1/n} = n \frac{d}{dt} Y(t)\ t^{1/n}$, $n \geq 2$.

---

(1) C'est une conséquence du fait que la convergence simple $g_n \longrightarrow g$ ne suffit pas pour entraîner la convergence des distributions $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g_n(t)$ vers la distribution $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ g(t)$.

CHAPITRE VI

QUELQUES APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

I - REPRESENTATIONS DE LA FONCTIONNELLE DE DIRAC -

On déduit du théorème VI du Chapitre V la propriété suivante, où l'indice j est remplacé par α pour la commodité des exemples :

Soient $L_\alpha(p)$ des fonctions holomorphes pour $\mathrm{Re}\ p > 0$; si, sur tout compact de ce demi-plan, $|L_\alpha(p)| < C\,|p|^{n+k}$, n entier ≥ 0, $k > 0$, et $L_\alpha(p) \longrightarrow p^n$ uniformément lorsque $\alpha \longrightarrow \alpha_0$, et si $L_\alpha(p) \sqsubset T_\alpha$, alors

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} T_\alpha = \delta^{(n)}$$

c'est-à-dire

(VI. 1) $$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \langle T_\alpha, \varphi(t) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

On peut ainsi trouver des représentations de la fonctionnelle de Dirac et de ses dérivées par des limites de distributions.

Exemples

$$\lim_{\alpha \to 0} p^{n+\alpha} = p^n \quad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha^m\, p^n}{(p+\alpha)^m} = p^n \quad , \qquad << \quad , \quad m \geq n+1$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^\tau\, e^{\phi}}{(p+r)^\tau} = 1 \quad , \quad r \text{ entier}$$

Or $$p^{n+\alpha} \sqsubset \mathrm{Pf}\ Y(t)\, \frac{t^{-n-1-\alpha}}{\Gamma(-n-\alpha)} \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$\frac{\alpha^m\, p^n}{(p+\alpha)^m} \sqsubset \frac{\alpha^n}{(m-1)!}\, \frac{d^n}{dt^n}\, Y(t)\, e^{-\alpha t}\, t^{m-1}$$

$$\frac{r^\tau\, e^{\phi}}{(p+r)^\tau} \sqsubset \frac{r^\tau}{(r-1)!}\, Y(t+1)\, e^{-r(t+1)}\, (t+1)^{r-1}$$

donc

(1) $$\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{Pf}\ Y(t)\, \frac{t^{-n-1-\alpha}}{\Gamma(-n-\alpha)} = \delta^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(2) $$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha^m}{(m-1)!}\, \frac{d^n}{dt^n}\, Y(t)\, e^{-\alpha t}\, t^{m-1} = \delta^{(n)} \quad , \quad << \quad , \quad m \geq n+1$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^r}{(r-1)!}\ Y(t+1)\ e^{-r(t+1)}\ (t+1)^{r-1} = \delta \ .$$

En particulier, (VI. 1) et (1) donnent pour $n = 0$.

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathrm{Pf} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \varphi(t)\ dt = \varphi(0) \quad .$$

On peut d'ailleurs établir cette relation sans recourir à la Transformation de Laplace. Elle donne pour δ une représentation qui ne ressort pas des théorèmes de Bochner[1].

En faisant dans (2) $n = 0$ et $m = 1$, on obtient[2] :

$$\lim_{a\to\infty} a\ e^{-at} = \delta \ .$$

II - DERIVEES ET PRIMITIVES D'ORDRE QUELCONQUE -

Posons avec M. L. Schwartz, [1] chapitre II,

$$Y_\nu = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\ Y(t)\ t^{\nu-1} \qquad \text{pour tout } \nu \text{ tel que } \quad \mathrm{Re}\ \nu > 0$$

$$Y_{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t^{\nu+1}} \quad , \quad \mathrm{Re}\ \nu \geq 0 \qquad \nu \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$Y_{-\nu} = \delta^{(n)} \qquad \nu = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donc $\qquad p^\nu \sqsubset Y_{-\nu}$, quel que soit ν .

Soit T une distribution de $(\mathcal{D}'_+)$ pourvue d'une image de Laplace $L(p)$. L'original de $p^n\ L(p)$ est la dérivée d'ordre n $D^n T$ de T. Généralisons en appelant *dérivée d'ordre* ν $D^\nu T$ l'original de $p^\nu\ L(p)$, ν réel ≥ 0, ou complexe tel que $\mathrm{Re}\ \nu \geq 0$.

Comme $p^\nu\ L(p) \sqsubset Y_{-\nu} * T$, on retrouve la définition de M. L.Schwartz ([1] ch. VI) :

(VI. 2) $\qquad D^\nu T = Y_{-\nu} * T \ .$

De $p^{-\alpha}\ p^{-\beta} = p^{-(\alpha+\beta)}$, α et β quelconques, on déduit :

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_\beta * Y_\alpha = Y_{\alpha+\beta}$$

puis

(VI. 3) $\qquad D^\nu(D^{\nu'}T) = D^{\nu'}(D^\nu T) = D^{\nu+\nu'} T \qquad \begin{matrix} \mathrm{Re}\ \nu \geq 0 \\ \mathrm{Re}\ \nu' \geq 0 \end{matrix}$

---

(1) cités par S. Colombo dans ses articles des Annales des Télécommunications (t. 8) et des Cahiers de Physique. Voir aussi "Equations aux dérivées partielles" Formulaire de mathématiques du C. N. R. S., fascicule VII.

(2) résultat indiqué par Parodi (1948, page 28). Il est très aisé de le vérifier directement.

puis

$$D^{\nu}(Y_{\nu} * T) = Y_{-\nu} * Y_{\nu} * T = Y_{0} * T = T$$

La distribution $\int^{\nu} T = Y_{\nu} * T$ apparait alors comme la *primitive généralisée d'ordre* ν de T. Lorsque ν est égal à un entier > 0, n, on montre[1] que c'est la *seule* primitive de T à support limité à gauche. D'ailleurs, quel que soit α, le produit de composition $Y_{\alpha} * T$ est dans $(\mathcal{O}_+')$[2].

Si ν est réel > 0, non entier, on peut écrire $\nu = n - \xi$ n entier ≥ 1, $0 < \xi < 1$, et

$$Y_{-\nu} = Y_{\xi} * Y_{-n} = Y_{\xi} * \delta^{(n)}$$

et si $\Phi(t)$ est une fonction à support borné, plus précisément dont le support est contenu dans (a, ∞), ayant une $n^{\text{ième}}$ dérivée ordinaire continue, sa dérivée d'ordre ν sera :

$$Y - \nu * \Phi(t) = Y_{\xi} * \delta^{(n)} * \Phi(t) = Y_{\xi} * \Phi^{(n)}(t) = Y(t-a) \int_{0}^{t-a} \frac{u^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \Phi^{(n)}(t-u)\, du .$$

En particulier $Y(t)\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} [\log t - \psi(\nu+1)]$, $\operatorname{Re} \nu \geq 0$, est la primitive d'ordre ν de la fonction $Y(t)(\log t + \gamma)$, qui est nulle pour $t < 0$.

III - EQUATION DE POISSON. DISTRIBUTIONS INVARIANTES PAR ROTATION -

Dans l'espace à m dimensions R^m, désignons par $r^2 = \sum_{1}^{m} x_i^2$ le carré de la distance à l'origine et par x l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Soient $\mathcal{S}(R^m)$ l'espace des fonctions $\varphi(x)$, indéfiniment dérivables, qui décroissent, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $1/r$, $\mathcal{S}'(R^m)$ le dual de $\mathcal{S}(R^m)$, $\mathcal{S}(R_+)$ l'espace des fonctions $\psi(t)$ indéfiniment dérivables sur la demi-droite (0, ∞) et dont toutes les dérivées décroissent rapidement à l'infini, et $\mathcal{S}'(R_+)$ l'espace des distributions tempérées à supports sur (0, ∞).

La transformée d'une distribution $T_x \in \mathcal{S}'(R^m)$ par une rotation ρ autour de l'origine est la distribution $\rho . T_x$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(R^m)$,

$$< \rho . T_x, \varphi(x) > = < T_x, \rho^{-1}\varphi(x) > = < T, \varphi(\rho x) >$$

On dit que T est *invariante* par rotation si $\rho . T = T$, quelle que soit ρ.

On montre[3] qu'il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des distributions de $\mathcal{S}'(R^m)$ invariantes par rotation et l'ensemble $\mathcal{S}'(R_+)$, avec la formule :

---

(1) cf. L. Schwartz [1] ch. VI paragraphe 5.

(2) Dans ses livres de 1947 et 1957 (p. 22), M. Parodi obtient, en généralisant l'égalité symbolique $F^{(n)}(p) \sqsubset (-1)^n t^n f(t)$ à n non entier, des résultats différents, mais s'accordant avec ceux de Liouville. Voir aussi P. Janet et Marcel Riesz.

(3) voir Séminaire Schwartz 1954-1955 (Paris), exposés 7 et 8.

(1) $$< T_x, \psi(\sum_1^m x_i^2) > = < \hat{T}_t, \psi(t) >$$

pour toute $\psi \in \mathcal{S}(R_+)$. Si $T_x = f(r^2)$, $f(t)$ étant une fonction localement sommable, l'image $\hat{T}_t$ de T_x est donnée par

(2) $$\hat{T}_t = \frac{1}{2} S_m \, t^{\frac{m-2}{2}} f(t) , \qquad S_m = 2 \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$$

(S_m est l'aire de la sphère de rayon 1 dans l'espace à m dimensions). Si $T_x = \delta$, $\hat{T}_t = \delta$.

Le laplacien d'une distribution T de $\mathcal{S}'(R^m)$ est la distribution ΔT définie par :

$$< \Delta T, \varphi(x) > = < T, \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varphi(x) > , \qquad \varphi \in \mathcal{S}(R^m) .$$

Si T est invariante par rotation, il en est de même de ΔT et il lui correspond par (1)

(3) $$4 \, t \frac{d^2}{dt^2} \hat{T}_t - (2m - 8) \frac{d}{dt} \hat{T}_t \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{S}'(R_+) .$$

Cela posé, cherchons la distribution $e \in \mathcal{S}'(R^m)$, invariante par rotation et solution de l'équation :

(4) $$\Delta e = \delta .$$

D'après (3), il lui correspond dans $\mathcal{S}'(R_+)$ l'équation :

(5) $$4 \, t \frac{d^2}{dt^2} \hat{e}_t - (2m - 8) \frac{d}{dt} \hat{e}_t = \delta .$$

Bien que seules les valeurs entières et positives de m nous intéressent pour le problème posé dans R^m, nous allons résoudre (5) pour m réel quelconque . Par effet de la transformation de Laplace (5) devient :

$$- 4 p^2 E'(p) - 2m \, p \, E(p) = 1 , \qquad \hat{e}_t \sqsupset E(p) .$$

La solution générale est :

$$E(p) = -\frac{1}{4} C(p) \, p^{-m/2} + B \, p^{-m/2}$$

avec $C'(p) = p^{\frac{m}{2} - 2}$ B constante.

1er cas : $m \neq -2N$, N entier ≥ -1 ,

$$E(p) = - \frac{1}{2(m-2)} \frac{1}{p} + B \, p^{-m/2}$$

d'où

(6) $$\hat{e}_t = -\frac{1}{2(m-2)}\, Y(t) + B_1\, Pf\, Y(t)\, t^{\frac{m}{2}-1}$$

B_1 constante, Pf inutile si $m > 0$.

2me cas : $m = 2$

$$E(p) = -\frac{1}{4}\frac{\log p}{p} + B\frac{1}{p}$$

d'où

$$\hat{e}_t = \frac{1}{4}\, Y(t)\,(\log t + \gamma) + B\, Y(t)$$

soit

(6)' $$\hat{e}_t = \frac{1}{4}\, Y(t) \log t + B_1\, Y(t) .$$

3me cas : $m = -2N$, $N = 0$ ou un entier > 0,

$$E(p) = \frac{1}{4(N+1)}\frac{1}{p} + B\, p^N$$

d'où

$$\hat{e} = \frac{1}{4(N+1)}\, Y(t) + B\, \delta^{(N)} .$$

Revenons à la distribution e que nous cherchons dans R^m. (6), (6)' et (2) donnent, A désignant une constante arbitraire,

$$e = \frac{1}{2} r + A \quad , \qquad r = |x| \quad , \qquad \text{dans } R$$

$$e = \frac{1}{2\pi}\log r + A \qquad \text{dans } R^2$$

$$e = -\frac{1}{(m-2)S_m}\frac{1}{r^{m-2}} + A \qquad \text{dans } R^m \ , \ m > 2 .$$

On dit que la distribution e est une *solution élémentaire* de l'opérateur Δ dans R^m. on en déduit tout de suite que l'équation :

$$\Delta T = U$$

où U est une distribution donnée à support borné dans R^m, a parmi ses solutions $T = e * U$, car :

$$\Delta(e * U) = (\Delta e) * U = \delta * U = U .$$

Cherchons maintenant la distribution $e \in \mathcal{S}'(R^m)$, invariante par rotation, solution de l'équation :

(7) $$(-\Delta + h)\, e = \delta \ , \qquad h > 0$$

D'après (3), il lui correspond l'équation :

(8) $$-4t\frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_t + (2m - 8)\frac{d}{dt}\hat{e}_t + h\,\hat{e}_t = \delta \quad , \qquad \text{dans } \mathcal{S}'(R_+)$$

Résolvons (8) pour m réel quelconque ; la transformation de Laplace donne :

$$4p^2\, E'(p) + (2mp + h)\, E(p) = 1 \quad , \qquad \hat{e}_t \sqsupset E(p) \ .$$

La solution générale en est :

$$E(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{m-2}{2}} p^{-\frac{m}{2}}\, e^{\frac{h}{4p}}\, Q\left(\frac{h}{4p}, -\frac{m-2}{2}\right) + B\, p^{-\frac{m}{2}}\, e^{\frac{h}{4p}}$$

où B est une constante arbitraire, et $Q(z, \nu)$ la fonction de Prym définie par :

$$Q(x, \nu) = \int_x^{\infty} u^{\nu-1}\, e^{-u}\, du \quad , \qquad x > 0 \ .$$

Pour m différent de 0 ou d'un entier $pair < 0$, nos tables donnent pour l'original de $E(p)$:

$$\hat{e}_t = \frac{\left(\frac{h}{4}\right)^{\frac{m-2}{4}}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^{\frac{m-2}{4}}\ K_{\frac{m-2}{2}}\left(\sqrt{ht}\right) + B_1\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ t^{\frac{m-2}{4}}\ I_{\frac{m-2}{2}}\left(\sqrt{ht}\right) , \tag{9}$$

Pf inutile si $m > 0$.

Pour $m = -2N$, N nul ou entier positif, on a, après des intégrations par parties,

$$Q(x,\ N+1) = N!\, e^{-x} \sum_{0}^{N} \frac{x^j}{j!}$$

et

$$E(p) = \frac{N!}{h} \sum_{j=0}^{N} \frac{(4/h)^j}{(N-j)!}\, p^j + B\, p^{N+1}\, \frac{e^{h/4p}}{p}$$

d'où

$$\hat{e}_t = \frac{N!}{h} \sum_{j=0}^{N} \frac{(4/h)^j}{(N-j)!}\, \delta^{(j)} + B_1\, \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} Y(t)\ I_0\left(\sqrt{ht}\right) ,$$

le dernier terme est une somme en $\delta^{(j)}$ et en $Y(t)\ I_j\left(\sqrt{ht}\right)$.

Revenons à l'équation (7) ; seules les valeurs de m entières ≥ 1 nous intéressent ; (9) et (2) donnent, A étant une constante arbitraire et :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2} \ ,$$

- dans R

$$e = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{4}{h}\right)^{1/4} r^{1/2}\ I_{1/2}\left(\sqrt{h}\, r\right) + A\, r^{1/2}\ I_{-1/2}\left(\sqrt{h}\, r\right) \ ;$$

- dans R^2

$$e = \frac{1}{2\pi}\, K_0\left(\sqrt{h}\, r\right) + A\ I_0\left(\sqrt{h}\, r\right) \ ;$$

- dans R^m

(10) $$e = \frac{h^{\frac{m-2}{4}}}{2^{m/2}\pi^{m/2}} \frac{1}{r^{\frac{m-2}{2}}} K_{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{h}\, r) + A \frac{1}{r^{\frac{m-2}{2}}} I_{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{h}\, r) \quad .$$

On dit, comme précédemment, que e est une *solution élémentaire* de l'opérateur $(-\Delta + h)$ dans R^m. On en déduit tout de suite que l'équation :

$$(-\Delta + h)\, T = U$$

où U est une distribution donnée à support borné dans R^m, a $T = e * U$ pour solution particulière.

Si dans (10) on change h en $-h$, on retrouve après quelques transformations l'expression de la solution élémentaire de l'opérateur $(\Delta + h)$ donnée dans le Séminaire Schwartz 1955 (exposé 8).

IV - FORMULES DE COMPOSITION -

Le Calcul Symbolique est un outil intéressant pour la recherche d'équations de composition auxquelles satisfait une fonction ou une distribution.

Par exemple, (cf. nos tables), si $J_n(t)$ et $N_n(t)$ sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces et si :

$$q = \sqrt{p^2 + 1}, \qquad Q = p + q, \qquad \log C = \gamma \quad ,$$

on a :

$$\pi\, \mathrm{Pf}\, Y(t)\, N_1(t) \sqsupset 2 \frac{p}{q} \log Q + 2 \log \frac{C}{2}$$

or

$$\log Q \sqsubset - \mathrm{Pf}\, Y(t) \frac{1}{t} J_0(t) - (\log \frac{C}{2})\, \delta = T$$

$$\frac{p}{q} \sqsubset \frac{d}{dt} Y(t)\, J_0(t) = -Y(t)\, J_1(t) + \delta = S$$

donc :

$$\pi\, \mathrm{Pf}\, Y(t)\, N_1(t) = 2S * T + 2 \log \frac{C}{2}\, \delta$$

soit :

$$\pi\, \mathrm{Pf}\, Y(t)\, N_1(t) = 2\, Y(t)\, J_1(t) * \mathrm{Pf}\, Y(t) \frac{J_0(t)}{t} -$$

$$- 2\, \mathrm{Pf}\, Y(t) \frac{J_0(t)}{t} + 2 \log \frac{C}{2}\, Y(t)\, J_1(t)$$

V - DEVELOPPEMENTS EN SERIE -

On a [1]

$$\frac{\pi}{2}\ \mathrm{Pf}\ Y(t)\ \coth\frac{\pi}{2}t \sqsupset -\psi\left(\frac{p}{\pi}\right) - \frac{\pi}{2p} - \gamma - \log\pi \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

En prenant l'image du premier membre écrit sous la forme :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} Y(t)\ \frac{2t}{t^2 + 4n^2}$$

en se souvenant que [1] :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t} \sqsupset -\log p - \gamma$$

et que [2] :

$$Y(t)\ \frac{t}{t^2+1} \sqsupset -\cos p\ ci(p) - \sin p\ si(p)$$

on obtient l'égalité de fonctions, pour $\mathrm{Re}\ p > 0$,

$$\psi\left(\frac{p}{\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{p} - \log\frac{p}{\pi} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos 2np\ ci(2np) + \sin 2np\ si(2np)\right] .$$

Autre exemple :

Si ν n'est pas entier ≥ 0, on a [1] :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t}\ I_{-\nu}(t) \sqsupset -\frac{1}{\nu}\left(p + \sqrt{p^2-1}\right)^{\nu} \qquad \mathrm{Re}\ p > 1 .$$

Maison a aussi :

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t}\ I_{-\nu}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Pf}\ \frac{2^{\nu-2j}\ t^{-\nu+2j-1}}{j!\,\Gamma(-\nu+j+1)} \sqsupset \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\nu+2j)}{j!\,\Gamma(-\nu+j+1)}\left(\frac{1}{2p}\right)^{-\nu+2j}$$

La série converge bien pour $\mathrm{Re}\ p > 1$ (elle converge pour $|p| > 1$).

Donc :

$$-\frac{1}{\nu}\left(p + \sqrt{p^2-1}\right)^{\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\nu+2j)}{j!\,\Gamma(-\nu+j+1)}\left(\frac{1}{2p}\right)^{-\nu+2j} \qquad , \mathrm{Re}\ p > 1 .$$

Soit, en recourant à la fonction hypergéométrique,

$$\left(p + \sqrt{p^2-1}\right)^{\nu} = (2p)^{\nu}\ {}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu-1}{2}\ ;\ -\nu+1\ ;\ 1/p^2\right) .$$

---

(1) voir nos tables.

(2) Mc Lachlan et Humbert, page 14.

BIBLIOGRAPHIE

(Certains des ouvrages ci-dessous n'ont pas été cités dans notre texte et sont indiqués pour l'étude du Calcul Symbolique ordinaire).

André ANGOT - *"Compléments de Mathématiques"* - (éd. Revue d'Optique, 1952) (contient un grand chapitre de Calcul Symbolique).

Serge COLOMBO - *"L'utilisation du Calcul symbolique dans la recherche mathématique"* - Ann. des Télécommunications t. 5 N° 10 (1950).
"La fonction de Dirac" - Ann. des Téléc. t. 8 N° 4 (1953) p. 131. Cahiers de la Physique, n° 60, 61 (1955).

P. DELERUE - *"Sur le calcul symbolique à n variables"* - Thèse, 1951 (Montpellier) - Ann. Soc. Sc. de Bruxelles (1953). - Bulletin des Sc. mathétiques t. LXXVI (1952).
"Sur des généralisations de la fonction de Mittag-Leffler" - Ann. Soc. Sc. Bruxelles (1954).

G. DOETSCH - *"Handbuch der Laplace-Transformation"* - Birkhauser, Bâle.

J. GILLY - *"Les parties finies d'intégrales et la transformation de Laplace"* - Revue Scientifique, 83è année (1945), fasc. 5.

J. HADAMARD - *"Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques"* - Hermann, Paris, 1932.

P. HUMBERT - *"Le calcul symbolique"* - Hermann, Paris, 1934.

P. HUMBERT et S. COLOMBO - *"Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique"* - Mém. des Sc. Math. fasc. CV, 1947.

P. JANET - *"Le calcul symbolique d'Heaviside"* - Gauthier-Villars, Paris, 1938 (ce petit livre ne fait pas appel à l'intégrale de Laplace ; le suivant est très intéressant).

M. JANET - *"Précis de Calcul matriciel et de Calcul opérationnel"* - Presses Universitaires de France 1954.

J. LAVOINE - *"Sur les transformées de Laplace de certaines distributions"* - C. R. Académie des Sc. t. 242 (1956) p. 717.
"Sur le passage de l'image de g(t) à celle de g(it) dans la transformation de Laplace" - C. R. Académie des Sc. t. 244 (1957) p. 991.

MARTINEAU et TREVES - *"Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions"* - fasc. I, C.D.U. Paris, 1955.

P. D. METHEE - *"Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz"* - Commentarii Mathematici Helvetici vol. 28, fasc. 3 (1954), p. 225 -

M. PARODI - *"Applications physiques de la transformation de Laplace"*- C.N.R.S. 1948.
"Introduction à l'étude de l'analyse symbolique" - Gauthier-Villars , 1957 (Ouvrage très complet, recommandé).

L. POLI et P. DELERUE - *"Le calcul symbolique à deux variables et ses applications"*- Mém. des Sc. Math, fasc. CXXVII, 1954.

Marcel RIESZ - *"L'intégrale de Riemann- Liouville"* - Acta math. 81 1949 -

Laurent SCHWARTZ - [1] *"Théorie des distributions"*- tomes I et II, Hermann, 1950-51.
[2] Cours de Méthodes mathématiques de la Physique, C.D.U. 1956. (Transformation de Laplace dans le fasc. VI).
[3] *"Transformation de Laplace des distributions"*- Communications du Séminaire math. de l'Univ. de Lund, 1952 (tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz, p. 196-206).
"Problèmes mixtes pour l'équation des ondes"- Séminaire Schwartz 1956 de la Faculté des Sciences de Paris.

B. VAN DER POL ET BREMMER -*"Operational Calculus"* - Cambridge Universit. Press, 1955.

D.V. WIDDER - *"The Laplace Transform"* - Princeton University Press 1946.

TABLES

G. DOETSCH - *"Anwendung der Laplace-Transformation"* - Bâle, 1955-56.

ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI - *"Tables of Integral Transforms"*, tome I, Mc Graw-Hill, New-York, 1954.

N.W. Mc LACHLAN et P. HUMBERT - *"Formulaire pour le calcul symbolique"* Mém. des Sc. Math. fasc. C 1950.

N.W. Mc LACHLAN, P. HUMBERT et L. POLI - *"Supplément au formulaire pour le calcul symbolique"* - Mém. des Sc. Math. fasc. CXII, 1950.

On trouve des tables abrégées dans Angot, Parodi, déjà cités, et dans

W. MAGNUS und F. OBERHETTINGER - *"Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik"* - Springer, Berlin, 1948.

SECONDE PARTIE

TABLE DE TRANSFORMÉES DE LAPLACE

AVERTISSEMENT

Rappel de la définition[1] :

Pour une fonction $h(t)$ localement sommable pour $t \geqq c$

$$h(t) \quad \sqsupset \quad H(p) = \int_c^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Pour une pseudo-fonction $\mathrm{Pf}\ g(t)$ dont le support est limité à gauche par c

$$\mathrm{Pf}\ g(t) \quad \sqsupset \quad G(p) = \mathrm{Pf} \int_c^{\infty} g(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Pour une distribution T_t à support limité à gauche

$$T_t \quad \sqsupset \quad T(p) = \langle T\ ,\ e^{pt} \rangle$$

La dernière définition contient la deuxième qui contient la première.

La mention $\mathrm{Re}\ p > \xi$ ou $\mathrm{Re}\ p \geqq \xi$, portée à la suite d'une transformée (ou image) indique le demi-plan d'holomorphie de cette image.

IMPORTANT -

Lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre dans les originaux, $f(at)$ est mis pour $Y(t)\ f(at)$, et $\mathrm{Pf}\ f(at)$ est mis pour $\mathrm{Pf}\ Y(t)\ f(at)$.

Dans des correspondances dépendant d'un paramètre, il pourra arriver que le Pf indiqué soit inutile pour certaines valeurs du paramètre.

On trouvera un index des notations à la fin de la table (page 107).

---

(1) On prendra bien garde que nous n'employons pas la définition de Carson $h(t) \supset p\, H(p)$, adoptée par nombre d'auteurs, dont Mc Lachlan et Humbert.

I – PRINCIPALES DISTRIBUTIONS

$\delta(t) \quad \sqsupset \quad 1$

$Y(t) \quad \sqsupset \quad \frac{1}{p} \qquad \text{Re } p > 0$

$Y_{-\nu} \quad \sqsupset \quad p^{\nu} \qquad \text{Re } p > 0$

$$Y_{-\nu} = P^{f} \; Y(t) \; \frac{t^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} , \qquad \text{Re } \nu > 0$$

ν non entier

$Y_{-\nu} = \delta^{(n)} \quad , \qquad \text{si } \nu = n \quad \text{entier} \geq 0 \; ;$

la convolution avec la distribution $Y_{-\nu}$ donne la dérivée d'ordre ν.

$Y(t \pm b) \quad \sqsupset \quad \frac{e^{\pm bp}}{p} \qquad \text{Re } p > 0$

$\delta^{(n)}(t \pm b) \quad \sqsupset \quad e^{\pm bp} \; p^{n} \qquad \text{Re } p > 0$

$\frac{1}{2}[\delta(t+b) - \delta(t-b)] \quad \sqsupset \quad \text{sh } bp$

$\frac{1}{2}[\delta(t+b) + \delta(t-b)] \quad \sqsupset \quad \text{ch } bp$

$\delta(t) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-2jb) \quad \sqsupset \quad \text{coth } bp$

$\delta(t) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j} \delta(t-2jb) \quad \sqsupset \quad \text{th } bp$

II – FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET FONCTIONS ANALOGUES

$t^{\nu-1}$	$\supset\!\!-$	$\Gamma(\nu)\ \frac{1}{p^{\nu}}$	Re $\nu > 0$ — Re $p > 0$
Pf $\frac{1}{t^{\nu+1}}$	$\supset\!\!-$	$\Gamma(-\nu)\ p^{\nu}$	Re $\nu > 0$, ν non entier > 0 — Re $p \geqslant 0$
Pf $t^{-3/2}$	$\supset\!\!-$	$-2\sqrt{\pi p}$	Re $p \geqslant 0$
t^{n}	$\supset\!\!-$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	Re $p > 0$
$n \geqslant 0$			
Pf $\frac{1}{t}$	$\supset\!\!-$	$-\log p - \gamma = -\log Cp$	Re $p > 0$
Pf $\frac{1}{t^{2}}$	$\supset\!\!-$	$p(\log p + \gamma - 1)$	
Pf $\frac{1}{t^{3}}$	$\supset\!\!-$	$-\frac{p^{2}}{2}\left(\log p + \gamma - \frac{3}{2}\right)$	
Pf $\frac{1}{t^{n+1}}$	$\supset\!\!-$	$-(-1)^{n}\frac{p^{n}}{n!}\left[\log p - \psi(n+1)\right] =$	
		$= -(-1)^{n}\frac{p^{n}}{n!}\left(\log Cp - \sum_{1}^{n}\frac{1}{j}\right)$	Re $p \geqslant 0$
$n \geqslant 1$			
Pf $[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{1}{t}$	$\supset\!\!-$	$Ei(-bp) - \log Cp$	Re $p \geqslant 0$
$b > 0$			
Pf $[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{1}{t^{2}}$	$\supset\!\!-$	$-p[Ei(-bp) - \log Cp + 1] - \frac{1}{b}e^{-bp}$	Re $p \geqslant 0$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)]\frac{1}{t^{n+1}} \supset \frac{(-1)^n}{n!}p^n\,[\mathrm{Ei}(-bp) - \log p + \psi(n+1)] - \frac{e^{-b\phi}}{n!\,b^n}\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\,(-bp)^j \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b}{t(b+t)} \supset e^{b\phi}\,\mathrm{Ei}(-bp) - \log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b^2}{t^2(b+t)} \supset -e^{b\phi}\mathrm{Ei}(-bp) + bp(\log Cp - 1) + \log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t-b)(t-b)^{-\nu-1} \supset \Gamma(-\nu)\,e^{-b\phi}\,p^{\nu} \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$\nu \neq$ entier $\geqq 0$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)](b-t)^{-\nu-1} \supset b^{-\nu}\Sigma(\nu+1\ ;\ bp) \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$\nu \neq$ entier $\geqq 0$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)]\frac{1}{(b-t)^{3/2}} \supset 2\sqrt{\pi p}\,e^{-b\phi}\,\mathrm{erg}\sqrt{bp} - \frac{2}{\sqrt{b}}$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{t-b} \supset -e^{-b\phi}\,\mathrm{Ei}^*(bp) \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{1}{(t-b)^{n+1}} \supset -\frac{(-1)^n}{n!}p^n\,e^{-b\phi}\,\mathrm{Ei}^*(bp) + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{b^n}\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\,b^j\,p^j \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b}{(t-b)t} \supset -e^{-b\phi}\,\mathrm{Ei}^*(bp) + \log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b^2}{(t-b)t^2} \supset -e^{-b\phi}\mathrm{Ei}^*(bp) - bp(\log Cp - 1) + \log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{1}{b-t} \supset e^{-b\phi}[\,\mathrm{Ei}^*(bp) - \log Cp] \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{1}{(b-t)^2} \supset p\,e^{-b\phi}[\mathrm{Ei}^*(bp) - \log Cp + 1] - \frac{1}{b} \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-b)]\frac{1}{(b-t)^{n+1}} \supset \frac{p^n}{n!}\,e^{-b\phi}\,[\mathrm{Ei}^*(bp) - \log p + \psi(n+1)] - \frac{1}{n!}\,\frac{1}{b^n}\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\,b^j\,p^j \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\,[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{b^{2\nu}}{(b^2-t^2)^{\nu+1/2}} \quad \supset \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(-\nu+\tfrac{1}{2})\,(\tfrac{bp}{2})^{\nu}\,[\,I_{-\nu}(bp) - L_{-\nu}(bp)\,]$$

$$\nu \neq n + \tfrac{1}{2} \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t-b)\ \frac{b^{2\nu}}{(t^2-b^2)^{\nu+1/2}} \quad \supset \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(-\nu+\tfrac{1}{2})\,(\tfrac{bp}{2})^{\nu}\,K_{-\nu}(bp)$$

$$\nu \neq n + \tfrac{1}{2} \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\,[Y(t) - Y(t-b)]\ \frac{b^2}{(b^2-t^2)^{3/2}} \quad \supset \quad -\frac{\pi}{2}\,bp\,[I_1(bp) - L_{-1}(bp)]$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t-b)\ \frac{b^2}{(t^2-b^2)^{3/2}} \quad \supset \quad -\,bp\,K_1(bp)$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b}{t^2-b^2} \quad \supset \quad \mathrm{chi}(bp)\ \mathrm{sh}\ bp - \mathrm{shi}(bp)\ \mathrm{ch}\ bp =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\,e^{bp}\,E_1(-bp) - e^{-bp}\,\mathrm{Ei}^*(bp)\,]$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{4b^3}{(t^2-b^2)^2} \quad \supset \quad (bp-1)\,e^{bp}\,\mathrm{Ei}(-bp) + (bp+1)\,e^{-bp}\,\mathrm{Ei}^*(bp)$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{16\,b^5}{(t^2-b^2)^3} \quad \supset \quad (b^2p^2 - 3bp + 3)\,e^{bp}\,\mathrm{Ei}(-bp)$$

$$- (b^2p^2 + 3bp + 3)\,e^{-bp}\,\mathrm{Ei}^*(bp) + 2bp$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{96b^7}{(t^2-b^2)^4} \quad \supset \quad (b^3p^3 - 6b^2p^2 + 15bp - 15)\,e^{bp}\,\mathrm{Ei}(-bp)$$

$$+ (b^3p^3 + 6b^2p^2 + 15bp + 15)\,e^{-bp}\,\mathrm{Ei}^*(bp) - 14\,bp$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b^2}{t(t^2-b^2)} \quad \supset \quad -\,\mathrm{chi}(bp)\ \mathrm{ch}\ bp + \mathrm{shi}(bp)\ \mathrm{sh}\ bp + \log Cp$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ Y(t)\ \frac{b^3}{t^2(t^2-b^2)} \quad \supset \quad \mathrm{chi}(bp)\ \mathrm{sh}\ bp - \mathrm{shi}(bp)\ \mathrm{ch}\ bp - bp(\log Cp - 1)$$

$$\mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{a^2}{t(t^2+a^2)} \quad \supset \quad \mathrm{ci}(ap)\ \cos ap + \mathrm{si}(ap)\ \sin ap - \log Cp$$

$$|\arg a| < \pi/2 \qquad \mathrm{Re}\ p \geqslant 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{a^3}{t^2(t^2+a^2)} \quad \square \quad -\,\mathrm{ci}(ap)\sin ap + \mathrm{si}(ap)\cos ap + ap(\log Cp - 1)$$

$|\arg a| < \pi/2$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{a^4}{t^3(t^2+a^2)} \quad \square \quad -\,\mathrm{ci}(ap)\cos ap - \mathrm{si}(ap)\sin ap - \frac{a^2p^2}{2}(\log Cp - \tfrac{3}{2}) + \log Cp$$

$|\arg a| < \pi/2$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}[Y(t) - Y(t-2b)]\frac{b^{2\nu}}{(2bt - t^2)^{\nu+1/2}} \quad \square \quad \sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+\tfrac{1}{2})\left(\frac{bp}{2}\right)^{\nu} e^{-b\phi} I_{-\nu}(bp)$$

$\nu \neq n + 1/2, \quad n \geq 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > 0$

$$\mathrm{Pf}\,[Y(t) - Y(t-2b)]\frac{1}{2bt-t^2} \quad \square \quad \frac{1}{2b}[\mathrm{Ei}(-2bp) + e^{-2b\phi}\,\mathrm{Ei}^*(2bp) - (1 + e^{-2b\phi})\log Cp\,]$$

$\mathrm{Re}\ p \geq 0$

III – LOGARITHMES

$\log t$	$\sqsupset$ $-\frac{\log Cp}{p} = -\frac{\log p + \gamma}{p}$	$\mathrm{Re}\ p > 0$
$[\gamma(t) - \gamma(t-b)] \log t$	$\sqsupset$ $\frac{1}{p}[\mathrm{Ei}(-bp) - \log Cp - e^{-bp} \log b]$	$\mathrm{Re}\ p \geq 0$
$\gamma(t) \log(t+b)$	$\sqsupset$ $-\frac{1}{p}[e^{bp}\mathrm{Ei}(-bp) - \log b]$	$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\gamma(t) \log \lvert t-b \rvert$	$\sqsupset$ $-\frac{1}{p}[e^{-bp}\mathrm{Ei}^*(bp) - \log b]$	$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\gamma(t) \log \lvert t^2-b^2 \rvert$	$\sqsupset$ $\frac{2}{p}[\mathrm{shi}(bp)\ \mathrm{sh}\ bp - \mathrm{chi}(bp)\ \mathrm{ch}\ bp + \log b]$	$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\mathrm{Pf} \frac{\log t}{t^{\nu+1}}$	$\sqsupset$ $\Gamma(-\nu)\ p^{\nu}\ [\psi(-\nu) - \log p]$	
ν non entier ≥ 0		$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\mathrm{Pf} \frac{\log t}{t}$	$\sqsupset$ $\frac{1}{2}[(\log Cp)^2 + \frac{\pi^2}{6}]$	$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\mathrm{Pf} \frac{\log t}{t^{n+1}}$	$\sqsupset$ $\frac{(-1)^n}{2}\frac{p^n}{n!}\ [(\log p - \psi(n+1))^2 + \frac{\pi^2}{3} - \psi'(n+1)]$	
n entier ≥ 0		$\mathrm{Re}\ p \geq 0$
$\mathrm{Pf} \frac{\log^2 t}{t^{\nu+1}}$	$\sqsupset$ $\Gamma(-\nu)\ p^{\nu} \left\{[\psi(-\nu) - \log p]^2 + \psi'(-\nu)\right\}$	
ν non entier ≥ 0		$\mathrm{Re}\ p > 0$
$\log^2 t$	$\sqsupset$ $\frac{1}{p}\ [(\log Cp)^2 + \frac{\pi^2}{6}]$	$\mathrm{Re}\ p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log^2 t}{t} \quad \supset \quad -\frac{1}{3}(\log Cp)^3 - \frac{\pi^2}{6}\log Cp + \frac{1}{3}\psi''(1) \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log^2 t}{t^{n+1}} \quad \supset \quad \frac{(-1)^n}{3}\frac{p^n}{n!}\Big\{[\psi(n+1) - \log p]^3 + 3[2\psi'(1) - \psi'(n+1)][\psi(n+1) - \log p] + \psi''(n+1)\Big\}$$

n entier ≥ 0 $\qquad \mathrm{Re}\ p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log(t^2+a^2)}{t} \quad \supset \quad ci^2(ap) + si^2(ap) - 2\log a \log Cp$$

$|\arg a| < \pi/2 \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log(t^2+a^2)}{t^2} \quad \supset \quad -p[ci^2(ap) + si^2(ap) - 2\log a(\log Cp - 1)] + \frac{2}{a}[\sin ap\ ci(ap) - \cos ap\ si(ap)]$$

$|\arg a| < \pi/2 \qquad \mathrm{Re}\ p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log(t^2+a^2)}{t^3} \quad \supset \quad \frac{p^2}{2}[si^2(ap) + ci^2(ap) - 2\log a(\log Cp - \tfrac{3}{2})] - \frac{p}{a}[\sin ap\ ci(ap) - \cos ap\ si(ap)] + \frac{1}{a^2}[\cos ap\ ci(ap) + \sin ap\ si(ap) - \log Cp + \tfrac{1}{2}]$$

$|\arg a| < \pi/2 \qquad \mathrm{Re}\ p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log|t^2-b^2|}{t} \quad \supset \quad Ei(-bp)\,Ei^*(bp) - 2\log b \log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log|t^2-b^2|}{t^2} \quad \supset \quad -p[Ei(-bp)\,Ei^*(bp) - 2\log b(\log Cp - 1)] + \frac{1}{b}[e^{bp}Ei(-bp) - e^{-bp}Ei^*(bp)] \qquad \mathrm{Re}\ p \geq 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\log|t^2-b^2|}{t^3} \quad \supset \quad \frac{p^2}{2}[Ei(-bp)\,Ei^*(bp) - 2\log b(\log Cp - \tfrac{3}{2})] - \frac{p}{2b}[e^{bp}Ei(-bp) - e^{-bp}Ei^*(bp)] - \frac{1}{2b^2}[e^{bp}Ei(-bp) + e^{-bp}Ei^*(bp) - 2\log Cp + 1] \qquad \mathrm{Re}\ p \geq 0$$

IV – EXPONENTIELLES

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{e^{at}}{t^{\nu+1}}$ $\supset$ $\Gamma(-\nu)(p-a)^{\nu}$ Re $p >$ Re a

ν non entier $\geqq 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{e^{at}}{t}$ $\supset$ $-\log C(p-a) = -\log(p-a) - \gamma$ Re $p >$ Re a

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{e^{at}}{t^{n+1}}$ $\supset$ $-(-1)^n \dfrac{(p-a)^n}{n!}\left[\log(p-a) - \psi(n+1)\right]$ Re $p \geqslant$ Re a

n entier $\geqslant 1$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{a}{(1-e^{-at})^{\nu+1}}$ $\supset$ $\dfrac{\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\frac{p}{a})}{\Gamma(\frac{p}{a}-\nu)}$ Re $\dfrac{p}{a} > |\mathrm{Re}\ \nu|$

ν non entier $\geqq 0$

Re $a > 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{a}{(e^{at}-1)^{\nu+1}}$ $\supset$ $\dfrac{\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\frac{p}{a}+\nu+1)}{\Gamma(\frac{p}{a}+1)}$ Re $\dfrac{p}{a} > -1 -$ Re ν si Re $\nu < 0$

Re $\dfrac{p}{a} > -1$ si Re $\nu \geqq 0$

ν non entier $\geqq 0$

Re $a > 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{a}{e^{at}-1}$ $\supset$ $-\psi(\frac{p}{a}+1) - \log Ca = -\psi(\frac{p}{a}) - \dfrac{a}{p} - \log Ca$

Re $a > 0$ Re $p >$ – Re a

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{a}{(e^{at}-1)^2}$ $\supset$ $(\frac{p}{a}+1)\left[\psi(\frac{p}{a}+1) - 1 + \log Ca\right] + \dfrac{1}{2}$

Re $a > 0$ Re $p > -2$ Re a

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{2a}{(e^{at}-1)^3}$ $\supset$ $-\left(\frac{p}{a}+1\right)\left(\frac{p}{a}+2\right)\left[\psi\left(\frac{p}{a}+2\right)-\frac{3}{2}+\log Ca\right]+\frac{5}{12}$

Re $a>0$ Re $p>-3$ Re a

$\dfrac{t^n}{e^{at}-1}$ $\supset$ $(-\frac{1}{a})^{n+1}\ \psi^{(n)}\left(\frac{p}{a}+1\right)$

$n\geq 1$, Re $a>0$ Re $p>-$ Re a

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{t(e^{at}-1)}$ $\supset$ $\log\Gamma\left(\frac{p}{a}+1\right)+\left(\frac{p}{a}+1\right)\log Ca-\frac{1}{2}\log 2\pi Ca$

Re $a>0$ Re $p>-$ Re a

$\dfrac{t^{n+1}}{(e^{at}-1)^2}$ $\supset$ $-(-\frac{1}{a})^{n+2}\left[\left(\frac{p}{a}+1\right)\psi^{(n+1)}\left(\frac{p}{a}+1\right)+\right.$

$\left.+(n+1)\,\psi^{(n)}\left(\frac{p}{a}+1\right)\right]$

$n\geq 1$, Re $a>0$ Re $p>-2$ Re a

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{t}{(e^{at}-1)^2}$ $\supset$ $-\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{p}{a}+1\right)\psi'\left(\frac{p}{a}+1\right)+\right.$

$\left.+\psi\left(\frac{p}{a}+1\right)-1+\log Ca\right]$

Re $a>0$ Re $p>-2$ Re a

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-t^2}$ * $\supset$ $\frac{1}{2}\sqrt{p}\ e^{\frac{1}{8}p^2}\ K_{1/4}\left(\frac{p^2}{8}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4}}e^{\frac{1}{8}p^2}D_{-1/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

Re $p\geq 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{t^{3/2}}e^{-t^2}$ * $\supset$ $-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4}}e^{\frac{1}{8}p^2}\left[2p\ D_{-1/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\,D_{-3/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)\right]$

Re $p\geq 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{t^{5/2}}\ e^{-t^2}$ * $\supset$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4}}\ e^{\frac{1}{8}p^2}\left[\frac{4}{3}p^2\ D_{-1/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)-2\ D_{-5/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)\right]$

Re $p\geq 0$

$\mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{t^{7/2}}e^{-t^2}$ * $\supset$ $-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4}}e^{\frac{1}{8}p^2}\left[\frac{8}{15}(p^3-3p)\ D_{-1/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)-\right.$

$\left.-\frac{8}{5}p\ D_{-5/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2}\,D_{-7/2}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)\right]$

Re $p\geq 0$

*on peut changer t en at, Re $a>0$, comme en CS ordinaire.

$e^{-\sqrt{at}}$ $\supset$ $\frac{1}{p}\,{}_1F_1(1;\frac{1}{2};\frac{a}{4p}) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{p}\sqrt{\frac{a}{p}}\,e^{a/4p}$

$= \frac{1}{p} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{p}\sqrt{\frac{a}{p}}\,e^{a/4p}\,\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ Re $p \geq 0$

$pf\frac{e^{-\sqrt{at}}}{t}$ $\supset$ $-\pi\,\operatorname{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) + \frac{a}{2p}\,{}_2F_2(1,\ 1;\ 2,\ \frac{3}{2};\ \frac{a}{4p}) - \log Cp$

Re $p > 0$

$pf\frac{e^{-\sqrt{at}}}{t^2}$ $\supset$ $-\frac{a}{6}\sqrt{\pi\frac{a}{p}}\,{}_2F_2(1,\ \frac{1}{2};\ 2,\ \frac{5}{2};\ \frac{a}{4p}) + \frac{a^2}{24p}\,{}_2F_2(1,\ 1;\ 3,\ \frac{5}{2};\ \frac{a}{4p}) +$

$+ p(\log Cp - 1) - \frac{a}{2}\log Cp + 2\sqrt{\pi a p}$

Re $p > 0$

$\frac{e^{-\sqrt{at}}}{\sqrt{t}}$ $\supset$ $-\frac{\sqrt{a}}{p}\,{}_1F_1(1;\frac{3}{2};\frac{a}{4p}) + \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{a/4p} =$

$= \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{a/4p}\,\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ Re $p \geq 0$

$pf\frac{e^{-\sqrt{at}}}{t^{3/2}}$ $\supset$ $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,{}_2F_2(1,\frac{1}{2};\ 2,\frac{3}{2};\ \frac{a}{4p}) - \frac{a\sqrt{a}}{6p}\,{}_2F_2(1,1;2,\frac{5}{2};\frac{a}{4p}) +$

$+ \sqrt{a}\log Cp - 2\sqrt{\pi p}$ Re $p > 0$

V – FONCTIONS HYPERBOLIQUES

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{sh}\ at}{t^{\nu+1}} \quad \supset \quad \frac{\Gamma(-\nu)}{2}\left[(p-a)^{\nu}-(p+a)^{\nu}\right]$$

ν non entier ≥ 0 $\qquad$ Re $p >$ | Re a |

$$\frac{\mathrm{sh}\ at}{t} \quad \supset \quad \operatorname{arg\,th}\frac{a}{p}=\frac{1}{2}\log\frac{p+a}{p-a}=\varphi$$

Re $p >$ | Re a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{sh}\ at}{t^{2}} \quad \supset \quad -p\ \operatorname{arg\,th}\frac{a}{p}-a\,(\log s+\gamma-1)$$

Re $p >$ | Re a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{sh}\ at}{t^{n+1}} \quad \supset \quad \frac{(-1)^{n}}{n!}s^{n}\left\{\varphi\ \mathrm{ch}\ n\varphi+\left[\log s-\psi(n+1)\right]\mathrm{sh}\ n\varphi\right\}$$

$n \geq 0$ $\qquad$ Re $p >$ | Re a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ at}{t^{\nu+1}} \quad \supset \quad \frac{\Gamma(-\nu)}{2}\left[(p-a)^{\nu}+(p+a)^{\nu}\right]$$

ν non entier ≥ 0 $\qquad$ Re $p >$ | Re a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ at}{t} \quad \supset \quad -\log s-\gamma \qquad \text{Re } p > \mid \text{Re } a \mid$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ at}{t^{2}} \quad \supset \quad a\ \operatorname{arg\,th}\frac{a}{p}+p(\log s+\gamma-1)$$

Re $p >$ | Re a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ at}{t^{n+1}} \quad \supset \quad -\frac{(-1)^{n}}{n!}s^{n}\left\{\varphi\ \mathrm{sh}\ n\varphi+\left[\log s-\psi(n+1)\right]\mathrm{ch}\ n\varphi\right\}$$

$n \geq 0$ $\qquad$ Re $p >$ | Re a |

$$\frac{\mathrm{sh}\ bt\ \sin bt}{t} \quad \supset \quad \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{2b^{2}}{p^{2}} \qquad \text{Re } p > b$$

$$\frac{\operatorname{sh} bt \cos bt}{t} \supset \frac{1}{4} \log \frac{p^2+2bp+2b^2}{p^2-2bp+2b^2} \qquad \operatorname{Re} p > b$$

$$\frac{\operatorname{ch} bt \sin bt}{t} \supset \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2bp}{p^2-2b^2} \qquad \operatorname{Re} p > b$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{ch} bt \cos bt}{t} \supset -\frac{1}{4} \log(p^4+4b^4) - \gamma \qquad \operatorname{Re} p > b$$

$$\frac{\operatorname{sh} at \operatorname{sh} a't}{t} \supset -\frac{1}{4} \log \frac{p^2-(a+a')^2}{p^2-(a-a')^2} \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\frac{\operatorname{sh} at \operatorname{sh} a't}{t^2} \supset \frac{p}{4} \log \frac{p^2-(a+a')^2}{p^2-(a-a')^2} + \frac{a+a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a+a'}{p} - \frac{a-a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{sh} at \operatorname{sh} a't}{t^3} \supset -\frac{1}{8}(p^2+a^2+a'^2) \log \frac{p^2-(a+a')^2}{p^2-(a-a')^2} - \frac{aa'}{4} \log [p^2-(a+a')^2][p^2-(a-a')^2] - p\left[\frac{a+a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a+a'}{p} - \frac{a-a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}\right] - aa'\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{ch} at \operatorname{ch} a't}{t} \supset -\frac{1}{4} \log [p^2-(a+a')^2][p^2-(a-a')^2] - \gamma \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{ch} at \operatorname{ch} a't}{t^2} \supset \frac{p}{4}\left\{\log [p^2-(a+a')^2][p^2-(a-a')^2] + 4\gamma - 4\right\} + \frac{a+a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a+a'}{p} + \frac{a-a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{ch} at \operatorname{ch} a't}{t^3} \supset -\frac{1}{8}(p^2+a^2+a'^2)\left\{\log [p^2-(a+a')^2][p^2-(a-a')^2] + 4\gamma - 6\right\} - \frac{aa'}{4} \log \frac{p^2-(a+a')^2}{p^2-(a-a')^2} - p\left[\frac{a+a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a+a'}{p} + \frac{a-a'}{2} \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}\right]$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\frac{\operatorname{sh} at \operatorname{ch} a't}{t} \quad \square \quad \frac{1}{2}\left(\operatorname{arg\,th} \frac{a+a'}{p} + \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}\right), \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{sh} at \operatorname{ch} a't}{t^2} \quad \square \quad -\frac{p}{2}\left(\operatorname{arg\,tn} \frac{a+a'}{p} + \operatorname{arg\,th} \frac{a-a'}{p}\right) - \frac{a+a'}{4} \log\left[p^2-(a+a')^2\right] - \frac{a-a'}{4} \log\left[p^2-(a-a')^2\right] - a(\gamma-1), \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(a+a')$$

$$\operatorname{Pf} \coth at \quad \square \quad -\frac{1}{a}\left[\psi\left(\frac{p}{2a}\right) + \frac{a}{p} + \log 2Ca\right], \qquad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{a}{\operatorname{sh} at} \quad \square \quad -\psi\left(\frac{p}{2a} + \frac{1}{2}\right) - \log 2Ca, \qquad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$$

$$\operatorname{Pf} \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 at} \quad \square \quad p\left[\psi\left(\frac{p}{2a}\right) - 1 + \log 2Ca\right] + a, \qquad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} p > -2 \operatorname{Re} a$$

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t \operatorname{ch} at} \quad \square \quad 2 \log \Gamma\left(\frac{p}{4a} + \frac{1}{4}\right) - 2 \log \Gamma\left(\frac{p}{4a} + \frac{3}{4}\right) - \log 4Ca, \qquad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$$

$$\frac{\operatorname{sh} \sqrt{at}}{t} \quad \square \quad \pi \operatorname{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right), \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{at}}{t^2} \quad \square \quad -\pi\left(p - \frac{a}{2}\right) \operatorname{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) - \sqrt{\pi a p}\, e^{a/4p}, \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{at}}{t^3} \quad \square \quad \frac{\pi}{2}\left(p^2 - ap + \frac{a^2}{12}\right) \operatorname{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) + \frac{1}{6}\left(5p - \frac{a}{2}\right) \sqrt{\pi a p}\, e^{a/4p}, \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\frac{\operatorname{sn} \sqrt{at}}{\sqrt{t}} \quad \square \quad \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{a/4p} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right), \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{sh}\ \sqrt{at}}{t^{3/2}} \quad \supset \quad \frac{a\sqrt{a}}{6p}\ {}_2F_2\left(1,1;2,\frac{5}{2};\frac{a}{4p}\right) - \sqrt{a}\log Cp$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2p}\ {}_2F_2\left(1,1;2,\frac{3}{2};\frac{a}{4p}\right) -$$

$$- 2\sqrt{\pi p}\ e^{a/4p}\ \mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) - \sqrt{a}(\log Cp - 2)$$

Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ \sqrt{at}}{t} \quad \supset \quad \frac{a}{2p}\ {}_2F_2\left(1,1;2,\frac{3}{2};\frac{a}{4p}\right) - \log Cp$$

Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ \sqrt{at}}{t^2} \quad \supset \quad \frac{a^2}{24p}\ {}_2F_2\left(1,1;3,\frac{5}{2};\frac{a}{4p}\right) + p(\log Cp - 1) - \frac{a}{2}\log Cp$$

Re $p > 0$

$$\frac{\mathrm{ch}\ \sqrt{at}}{\sqrt{t}} \quad \supset \quad \sqrt{\frac{\pi}{p}}\ e^{a/4p} \qquad \text{Re } p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ \sqrt{at}}{t^{3/2}} \quad \supset \quad \pi\sqrt{a}\ \mathrm{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) - 2\sqrt{\pi p}\ e^{a/4p}$$

Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ch}\ \sqrt{at}}{t^{5/2}} \quad \supset \quad -\pi\sqrt{a}\left(p - \frac{a}{6}\right)\mathrm{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\right) + \frac{1}{3}(4p - a)\sqrt{\pi p}\ e^{a/4p}$$

Re $p > 0$

VI – FONCTIONS CIRCULAIRES

On a posé $r = \sqrt{p^2 + b^2}$ $\qquad b > 0$

et $\theta = \operatorname{Arctg} \frac{b}{p} = \frac{1}{2i} \log \frac{p+ib}{p-ib}$

$$\operatorname{Pf} \frac{\sin bt}{t^{\nu+1}} \supset -\Gamma(-\nu)\, r^{\nu} \sin \nu\theta \qquad \operatorname{Re} p > 0, \quad \nu \text{ non entier} \geqq 0$$

$$\frac{\sin bt}{t} \supset \operatorname{Arc\,tg} \frac{b}{p} = \theta \qquad |\arg p| < \pi/2$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\sin bt}{t^{n+1}} \supset \frac{(-1)^n}{n!} r^n \left\{ \theta \cos n\theta + [\log r - \psi(n+1)] \sin n\theta \right\}$$

$n \geqq 0 \qquad |\arg p| < \pi/2$

$$\operatorname{Pf} \frac{\cos bt}{t^{\nu+1}} \supset \Gamma(-\nu)\, r^{\nu} \cos \nu\theta \qquad \operatorname{Re} p > 0, \quad \nu \text{ non entier} \geqq 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\cos bt}{t} \supset -\frac{1}{2} \log (p^2 + b^2) - \gamma = -\log r - \gamma \qquad |\arg p| < \pi/2$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\cos bt}{t^{n+1}} \supset -\frac{(-1)^n}{n!} r^n \left\{ [\log r - \psi(n+1)] \cos n\theta - \theta \sin n\theta \right\}$$

$n \geqq 0 \qquad |\arg p| < \pi/2$

$$\frac{\sin^2 at}{t} \quad \square \quad \frac{1}{4}\log\left(1+4\frac{a^2}{p^2}\right) \qquad \operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\frac{\sin^2 at}{t^2} \quad \square \quad -\frac{p}{4}\log\left(1+4\frac{a^2}{p^2}\right)+2\operatorname{Arc\,tg}\frac{2a}{p} \qquad \operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\sin^2 at}{t^3} \quad \square \quad \frac{p^2}{8}\left(1-4\frac{a^2}{p^2}\right)\log\left(1+4\frac{a^2}{p^2}\right)-ap\operatorname{Arc\,tg}\frac{2a}{p}-$$
$$-a^2\left(\log Cp-\frac{3}{2}\right) \qquad \operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\sin^2 at}{t^4} \quad \square \quad -\frac{p}{24}\left(p^2-12a^2\right)\log\left(1+4\frac{a^2}{p^2}\right)+$$
$$+\frac{a}{2}\left(p^2-\frac{4}{3}a^2\right)\operatorname{Arc\,tg}\frac{2a}{p}+a^2p\left(\log Cp-\frac{11}{6}\right)$$
$$\operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\cos^2 at}{t} \quad \square \quad -\frac{1}{4}\log C^4p^2\left(p^2+4a^2\right) \qquad \operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\cos^2 at}{t^2} \quad \square \quad \frac{p}{4}\log C^4p^2\left(p^2+4a^2\right)-p-a\operatorname{Arc\,tg}\frac{2a}{p}$$
$$\operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\cos^2 at}{t^3} \quad \square \quad -\frac{p^2}{8}\log C^4p^2\left(p^2+4a^2\right)+\frac{a^2}{2}\log C^2\left(p^2+4a^2\right)+$$
$$+ap\operatorname{Arc\,tg}\frac{2a}{p}+\frac{3}{2}\left(\frac{p^2}{2}-a^2\right)$$
$$\operatorname{Re} p > 2\,|\operatorname{Im} a|$$

$$\operatorname{Pf}\frac{b}{\sin bt} \quad \square \quad -\psi\left(\frac{-ip}{2b}+\frac{1}{2}\right)-\log 2bC-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\frac{p}{b}$$
$$=-\log\frac{b}{2}-2p\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\frac{p}{p^2+(2j+1)^2b^2}$$
$$\operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf}\frac{b^2}{\sin^2 bt} \quad \square \quad p\left[\psi\left(\frac{-ip}{2b}\right)-1+\log 2bC\right]+i\left(b+p\frac{\pi}{2}\coth\frac{\pi}{2}\frac{p}{b}\right)$$
$$=p\log 2b-p\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{4j}{\frac{p^2}{b^2}+4j^2}-\frac{1}{j+1}\right]$$
$$\operatorname{Re} p > 0$$

Pf $\dfrac{b}{\cos bt}$

$$\supset \quad -i\,\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b}+\frac{3}{4}\right)-\psi\left(\frac{-ip}{4b}+\frac{1}{4}\right)\right]+i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}}$$

$$=2b\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{p}{p^2+(2j+1)^2b^2}$$

Re $p > 0$

Pf $\dfrac{b^2}{\cos^2 bt}$

$$\supset \quad -\frac{p}{2}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{-ip}{4b}\right)\right]+i\left[b+p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}}\right]$$

$$=-4p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\,j}{\frac{p^2}{b^2}+4j^2}$$

Re $p > 0$

Pf $b\ \operatorname{tg} bt$

$$\supset \quad -\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{-ip}{4b}\right)\right]+i\left[\frac{b}{p}+\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}}\right]$$

$$=\log 2+p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\,\frac{p}{p^2+4j^2b^2}$$

Re $p > 0$

Pf $b^2\ \operatorname{tg}^2 bt$

$$\supset \quad -\frac{p}{2}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{-ip}{4b}\right)\right]-\frac{b^2}{p}+i\left[b+p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}}\right]$$

$$=-\frac{b^2}{p}-2bp\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{2jb}{p^2+4j^2b^2}$$

Re $p > 0$

Pf $b\ \operatorname{cotg} bt$

$$\supset \quad -\psi\left(\frac{-ip}{2b}\right)-\log 2bC-i\left(\frac{b}{p}+\frac{\pi}{2}\coth\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}\right)$$

$$=-\log 2b-p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,\frac{p}{p^2+4j^2b^2}$$

Re $p > 0$

Pf $b^2\ \operatorname{cotg}^2 bt$

$$\supset \quad p\left[\psi\left(\frac{-ip}{2b}\right)-1+\log 2bC\right]-\frac{b^2}{p}+i\left[b+p\,\frac{\pi}{2}\coth\frac{\pi}{2}\,\frac{p}{b}\right]$$

$$=-\frac{b^2}{p}+p\log 2b-p\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{4j}{\frac{p^2}{b^2}+4j^2}-\frac{1}{j+1}\right]$$

Re $p > 0$

$\log|\sin bt| \quad \supset \quad -\frac{1}{p}\left[\psi\left(\frac{-ip}{2b}\right) + \log 2C\right] - \frac{i}{p}\left[\frac{b}{p} + \frac{\pi}{2}\coth\frac{\pi}{2}\frac{p}{b}\right]$

$$= -\frac{\log 2}{p} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\frac{p}{p^2 + 4j^2b^2}$$

Re $p > 0$

$\log|\cos bt| \quad \supset \quad \frac{1}{2p}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{-ip}{4b}\right)\right] - \frac{i}{p}\left[\frac{b}{p} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\frac{p}{b}}\right]$

$$= -\frac{\log 2}{p} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\frac{p}{p^2 + 4j^2b^2}$$

Re $p > 0$

$\log|\operatorname{tg} bt| \quad \supset \quad -\frac{1}{p}\left[\psi\left(\frac{-ip}{4b} + \frac{1}{2}\right) + \log 4C\right] - \frac{i}{p}\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\frac{p}{b}$

$$= -2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\frac{p}{p^2 + 4(2j+1)^2b^2}$$

Re $p > 0$

$\log\left|\operatorname{tg}\left(bt + \frac{\pi}{4}\right)\right| \quad \supset \quad -i\frac{1}{2p}\left[\psi\left(\frac{-ip}{8b} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{-ip}{8b} + \frac{1}{4}\right)\right] + i\frac{1}{p}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}\frac{p}{b}}$

$$= 4b\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{p^2 + 4(2j+1)^2b^2}$$

Re $p > 0$

$\frac{\sin\sqrt{bt}}{t} \quad \supset \quad \pi\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right)$ Re $p \geq 0$

$\operatorname{Pf}\frac{\sin\sqrt{bt}}{t^2} \quad \supset \quad -\pi\left(p + \frac{b}{2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right) - \sqrt{\pi bp}\, e^{-b/4p}$

Re $p \geq 0$

$\operatorname{Pf}\frac{\sin\sqrt{bt}}{t^3} \quad \supset \quad \frac{\pi}{2}\left(p^2 + bp + \frac{b^2}{12}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right) +$

$$+ \frac{1}{6}\left(5p + \frac{b}{2}\right)\sqrt{\pi bp}\, e^{-b/4p}$$

Re $p \geq 0$

$\frac{\sin\sqrt{bt}}{\sqrt{t}} \quad \supset \quad \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-b/4p}\operatorname{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right)$ Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{\sin\sqrt{bt}}{t^{3/2}} \supset -\frac{b\sqrt{b}}{6p}\,{}_2F_2\left(1,1;2,\frac{5}{2};\frac{-b}{4p}\right) - \sqrt{b}\,\log Cp$$

$$= -\frac{b\sqrt{b}}{2p}\,{}_2F_2\left(1,1;2,\frac{3}{2};-\frac{b}{4p}\right) -$$

$$-2\sqrt{\pi p}\,e^{-b/4p}\,\mathrm{erg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right) - \sqrt{b}\,(\log Cp - 2)$$

Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{\cos\sqrt{bt}}{t} \supset -\frac{b}{2p}\,{}_2F_2\left(1,1;2,\frac{3}{2};\frac{-b}{4p}\right) - \log Cp$$

Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{\cos\sqrt{bt}}{t^2} \supset \frac{b^2}{24p}\,{}_2F_2\left(1,1;3,\frac{5}{2};-\frac{b}{4p}\right) + p\,(\log Cp - 1) + \frac{b}{2}\log Cp$$

Re $p > 0$

$$\frac{\cos\sqrt{bt}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-b/4p} \qquad \text{Re } p > 0$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{\cos\sqrt{bt}}{t^{3/2}} \supset -\pi\sqrt{b}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right) - 2\sqrt{\pi p}\,e^{-b/4p}$$

Re $p \geq 0$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{\cos\sqrt{bt}}{t^{5/2}} \supset \pi\sqrt{b}\left(p+\frac{b}{6}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{p}}\right) + \frac{1}{3}(4p+b)\sqrt{\pi p}\,e^{-b/4p}$$

Re $p \geq 0$

VII – FONCTION D'ERREUR ET FONCTION COMPLÉMENTAIRE

$$\frac{e^{at}}{t}\operatorname{erf}\sqrt{at} \quad \sqsupset \quad 2\ \operatorname{arg\,coth}\sqrt{\frac{p}{a}} \qquad \operatorname{Re}(p-a) > 0$$

$$\operatorname{Pf}\frac{e^{at}}{t^2}\operatorname{erf}\sqrt{at} \quad \sqsupset \quad -2(p-a)\ \operatorname{arg\,coth}\sqrt{\frac{p}{a}} - 2\sqrt{ap} \qquad \operatorname{Re}(p-a) > 0$$

$$\operatorname{Pf}\frac{e^{at}}{t^3}\operatorname{erf}\sqrt{at} \quad \sqsupset \quad (p-a)^2\ \operatorname{arg\,coth}\sqrt{\frac{p}{a}} + \left(\frac{5}{3}p - a\right)\sqrt{ap} \qquad \operatorname{Re}(p-a) > 0$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erfc}\sqrt{at}}{\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{p}}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{p}{a}} \qquad \operatorname{Re}(p+a) > 0$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erfc}\sqrt{at}}{t\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad -2\sqrt{\frac{p}{a}}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{p}{a}} + \log(p+a) + \gamma - 2 \qquad \operatorname{Re}(p+a) > 0$$

$$\operatorname{Pf}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erfc}\sqrt{at}}{t^2\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad \frac{4}{3}p\sqrt{\frac{p}{a}}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{p}{a}} - \left(p+\frac{a}{3}\right)[\log(p+a) + \gamma - 1] + \frac{4}{3}p + \frac{2}{9}a \qquad \operatorname{Re}(p+a) > 0$$

VIII – FONCTIONS DE BESSEL DE PREMIÈRE ESPÈCE (1)

$$\mathrm{Pf}\ J_{-\nu}(at) \supset \frac{1}{r}\left(\frac{R}{a}\right)^{\nu} \qquad \nu \neq 1,2,3,\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$J_{-n}(at) + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} C_{n-1-j}^{\ j} \left(\frac{2}{a}\right)^{n-2j} \delta^{(n-1-2j)} \supset \frac{1}{r}\left(\frac{R}{a}\right)^{n} \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t} J_{\nu}(at) \supset \frac{1}{\nu}\left(\frac{a}{R}\right)^{\nu} \qquad \nu \neq 0,-1,-2,-3,\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^2} J_{\nu}(at) \supset \frac{a}{2\nu}\left(\frac{a}{R}\right)^{\nu}\left[\frac{a/R}{\nu+1} + \frac{R/a}{\nu-1}\right] \qquad \nu \neq 1,0,-1,-2,-\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n+1}} J_{\nu}(at) \supset \frac{a^n}{2^n}\left(\frac{R}{a}\right)^{-\nu-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{C_n^{\,j}\left(\frac{R}{a}\right)^{2j}}{(\nu+n-j)(\nu+n-j-1)\ldots(\nu-j)} \qquad \nu \neq n,n-1,n-2,\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t} J_{o}(at) \supset -\log\frac{C}{2}R = -\operatorname{arg\,sh}\frac{p}{a} - \log\frac{a}{2}C \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^2} J_{o}(at) \supset p\log\frac{C}{2}R - r \qquad \mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

---

(1) $r = \sqrt{p^2 + a^2}$, $\quad R = p + r$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^3}J_0(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{2}\left[\left(p^2-\frac{a^2}{2}\right)\log\frac{C}{2}R-\frac{3}{2}pr+\frac{a^2}{2}\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^4}J_0(at) \quad \supset \quad \frac{1}{3!}\left[\left(p^3-\frac{3}{2}a^2p\right)\log\frac{C}{2}R-\frac{1}{6}(11p^2-4a^2)r+\frac{3}{2}a^2p\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^5}J_0(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{4!}\left[\left(p^4-3a^2p^2+\frac{3}{8}a^4\right)\log\frac{C}{2}R- \right.$$
$$\left. -\frac{1}{24}(50p^3-55a^2p)r+3a^2p^2-\frac{9}{16}a^4\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\frac{1}{t}J_1(at) \quad \supset \quad \frac{a}{R}=\frac{1}{a}(r-p) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^2}J_1(at) \quad \supset \quad -\frac{a}{2}\left(\log\frac{C}{2}R+\frac{p}{R}-\frac{1}{2}\right) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^3}J_1(at) \quad \supset \quad \frac{a}{2}\left(p\log\frac{C}{2}R+\frac{1}{3}\frac{p^2}{R}-\frac{2}{3}r-\frac{1}{2}p\right) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^4}J_1(at) \quad \supset \quad -\frac{a}{4}\left[\left(p^2-\frac{a^2}{4}\right)\log\frac{C}{2}R+\frac{1}{6}\frac{p^3}{R}-\frac{13}{12}pr-\frac{1}{2}p^2+\frac{5}{16}a^2\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^5}J_1(at) \quad \supset \quad \frac{a}{2.3!}\left[\left(p^3-\frac{3}{4}a^2p\right)\log\frac{C}{2}R+\frac{1}{10}\frac{p^4}{R}- \right.$$
$$\left. -\frac{1}{60}(83p^2-16a^2)r-\frac{1}{2}p^3+\frac{15}{16}a^2p\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\frac{1}{t}J_2(at) \quad \supset \quad \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2} \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\frac{1}{t^2}J_2(at) \quad \supset \quad \frac{1}{3!}\left(2\frac{r^2}{R}-p\right) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^3}J_2(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{4!}\left[3a^2 \log \frac{C}{2}R + (2p^2 + 5a^2)\frac{p}{R} - p^2 - \frac{9}{4}a^2\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^4}J_2(at) \quad \supset \quad \frac{1}{5!}\left[15a^2p \log \frac{C}{2}R + (2p^2 + 9a^2)\frac{p^2}{R} - 8a^2r - p^3 - \frac{45}{4}a^2p\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\frac{1}{t^n}J_n(at) \quad \supset \quad \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{R}{a}\right)^{-2n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(R/a)^{2j}}{j!\,(2n-1-j)!}$$

$n \geq 1$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^{n+1}}J_n(at) \quad \supset \quad -\left(\frac{a}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\log \frac{C}{2}R + \left(\frac{a}{2}\right)^n n!\left(\frac{R}{a}\right)^{-2n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(R/a)^{2j}}{(n-j)\,j!\,(2n-j)!}$$

$n \geq 0$ (pour $n = 0$ supprimer le sigma) Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^{n+2}}J_n(at) \quad \supset \quad \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n!}\left(\frac{2p}{a}\log \frac{C}{2}R - \frac{1}{n+1}\frac{a}{R} - \frac{R}{a}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{R}{a}\right)^{-2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(R/a)^{2j}}{(n-j)(n+1-j)\,j!\,(2n+1-j)!}$$

$n \geq 0$ (pour $n = 0$ supprimer le sigma) Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t^{n+3}}J_n(at) \quad \supset \quad -\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{n!}\left[\left(2\frac{p^2}{a^2} - \frac{1}{n+1}\right)\log \frac{C}{2}R + \frac{n+\frac{3}{2}}{(n+1)(n+2)}\frac{a^2}{R^2} + 1 - \frac{3}{4}\frac{R^2}{a^2}\right]$$

$n \geq 0$

$$+ \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2}(n+2)!\left(\frac{R}{a}\right)^{-2n-2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(R/a)^{2j}}{(n-j)(n+1-j)(n+2-j)\,j!\,(2n+2-j)!}$$

(pour $n = 0$ supprimer le sigma) Re $p >$ | Im a |

$$\sqrt{t}\,J_{1/2}(at) \quad \supset \quad \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\frac{1}{p^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\frac{1}{r^2} \qquad \text{Re } p > | \text{Im } a |$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}J_{1/2}(at) \quad \supset \quad \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{p} = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\theta \qquad \text{Re } p > | \text{Im } a |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{3/2}} J_{1/2}(at) \quad \supset \quad -\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[p \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{p} + a(\log r + \gamma - 1)\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{5/2}} J_{1/2}(at) \quad \supset \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[(p^2-a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{p} + 2ap\left(\log r + \gamma - \frac{3}{2}\right)\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n-1/2}} J_{1/2}(at) \quad \supset \quad \text{voir } \frac{\sin bt}{t^n} \qquad (n = 2,3,\ldots)$$

$$\sqrt{t}\, \ldots_{-1,2}(2t) \quad \supset \quad \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\,\frac{p}{r^2}$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{\sqrt{t}} J_{-1/2}(at) \quad \supset \quad -\sqrt{\frac{2}{\pi a}}(\log r + \gamma)$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{3/2}} J_{-1/2}(at) \quad \supset \quad \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[p(\log r + \gamma - 1) - a \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{p}\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{5/2}} J_{-1/2}(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[(p^2-a^2)\left(\log r + \gamma - \frac{3}{2}\right) - 2ap \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{p}\right]$$

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n-1/2}} J_{-1/2}(at) \qquad \text{voir } \frac{\cos bt}{t^n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\mathrm{Pf}\ \left(\frac{at}{2}\right)^{-\alpha} J_\nu(at) \quad \supset \quad \frac{a^{\nu-\alpha}}{2^{\nu-\alpha}} \frac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{1}{p^{\nu-\alpha+1}}\ {}_2F_1\left(\frac{\nu-\alpha+1}{2}, \frac{\nu-\alpha+2}{2}; \nu+1; -\frac{a^2}{p^2}\right)$$

$\nu - \alpha \neq$ entier < 0

$\nu \neq$ entier < 0

Re $p >$ | Im a |

$$\left(\frac{at}{2}\right)^{-\nu+n} J_\nu(at) \quad \supset \quad \frac{2}{a} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \Phi\left(0; n; \nu+1; \frac{2}{a}p\right)$$

n entier ≥ 0

$\nu \neq$ entier < 0

Re $p >$ | Im a |

$$\mathrm{Pf}\ \left(\frac{at}{2}\right)^{-\nu-2n} J_\nu(at) \quad \square \quad \frac{2}{a}\,\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left\{\Phi\left(n;\,-2n;\,\nu+1;\,\frac{2}{a}p\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!\,(\nu+1)_j}\,\frac{\left(2\frac{p}{a}\right)^{2n-2j-1}}{(2n-2j-1)!}\,[\log p - \psi(2n-2j)]\right\}$$

n entier > 0
$\nu \neq$ entier < 0

$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$

$$\mathrm{Pf}\ \left(\frac{at}{2}\right)^{-\nu-2n-1} J_\nu(at) \quad \square \quad \frac{2}{a}\,\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left\{\Phi(n+1;\,-2n-1;\,\nu+1;\,\frac{2}{a}p) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!\,(\nu+1)_j}\,\frac{\left(2\frac{p}{a}\right)^{2n-2j}}{(2n-2j)!}\,[\log p - \psi(2n-2j+1)]\right\}$$

n entier > 0
$\nu \neq$ entier < 0

$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$

VIII bis – FONCTIONS DE BESSEL DE PREMIÈRE ESPÈCE D'ARGUMENT $2\sqrt{at}$

Pf $\dfrac{J_o(2\sqrt{at})}{t}$ $\supset$ $\mathrm{Ei}(-\dfrac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a}$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

Pf $\dfrac{J_o(2\sqrt{at})}{t^2}$ $\supset$ $-(p+a)\left[\mathrm{Ei}(-\dfrac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + 2\right] - p(e^{-a/p} - 2)$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

Pf $\dfrac{J_o(2\sqrt{at})}{t^3}$ $\supset$ $\dfrac{1}{4}(2p^2 + 4ap + a^2)\left[\mathrm{Ei}(-\dfrac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + 2\right] +$

$+ \dfrac{1}{4}(3p^2 + ap)e^{-a/p} - p^2 + \dfrac{a^2}{4}$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$J_2(2\sqrt{at})$ $\supset$ $-(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{a})e^{-a/p} + \dfrac{1}{a}$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$\dfrac{J_2(2\sqrt{at})}{t}$ $\supset$ $\dfrac{p}{a}(e^{-a/p} - 1) + 1$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

Pf $\dfrac{J_2(2\sqrt{at})}{t^2}$ $\supset$ $\dfrac{a}{2}\left[\mathrm{Ei}(-\dfrac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + \dfrac{3}{2}\right] -$

$- \dfrac{p}{2}(\dfrac{p}{a} - 1)(e^{-a/p} - 1) - \dfrac{p}{2}$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\nu_1(2\sqrt{at})}{t\sqrt{at}} \quad \supset \quad \mathrm{Ei}(-\frac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + 1 + \frac{p}{a}(e^{-a/p} - 1)$$

$\mathrm{Re}\ a > 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{J_1(2\sqrt{at})}{t^2\sqrt{at}} \quad \supset \quad -\frac{p}{2}(\frac{a}{p} + 2)\left[\mathrm{Ei}(-\frac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + \frac{5}{2}\right] - \frac{p}{2}(\frac{p}{a} + 1)(e^{-a/p} - 1) + p$$

$\mathrm{Re}\ a > 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ t^{\nu}J_{2\nu}(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{a^{\nu}}{p^{2\nu+1}}\ e^{-a/p}$$

$2\nu \neq -1, -2, -3, -\ldots$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > 0$

$$t^{-n/2}J_{-n}(2\sqrt{at}) = (-1)^n t^{-n/2}J_n(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{p^{n-1}}{a^{n/2}}\left[e^{-a/p} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}(-\frac{a}{p})^j\right]$$

$n \geq 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > 0$

(pour $n=0$ supprimer le sigma)

IX – FONCTIONS DE BESSEL DE DEUXIÈME ESPÈCE [1]

$$\mathrm{Pf}\ N_\nu(at) \quad \supset \quad \frac{(\frac{a}{R})^\nu \cos \nu\pi - (\frac{R}{a})^\nu}{r \sin \nu\pi}, \qquad \nu \text{ non entier ni nul}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\pi\, N_0(at) \quad \supset \quad -\frac{2}{r} \log \frac{R}{a} = -\frac{2}{r} \operatorname{arg\,sh} \frac{p}{a}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \pi\, N_1(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{r}\left(\frac{a}{R} - \frac{R}{a}\right) \log \frac{R}{a} - \frac{2}{a} \log \frac{2}{aC}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \pi\, N_2(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{r}\left[(\frac{a}{R})^2 + (\frac{R}{a})^2\right] \log \frac{R}{a} + (\frac{2}{a})^2 \left[\log \frac{2}{aC} + 1\right] p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \pi\, N_{2n}(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{r}\left[(\frac{a}{R})^{2n} + (\frac{R}{a})^{2n}\right] \log \frac{R}{a} +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1} \left[\log \frac{2}{a} + \psi(n+j+1)\right] (\frac{2}{a} p)^{2j+1}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \pi\, N_{2n+1}(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{r}\left[(\frac{a}{R})^{2n+1} - (\frac{R}{a})^{2n+1}\right] \log \frac{R}{a} -$$

$$- \frac{2}{a} \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j} \left[\log \frac{2}{a} + \psi(n+j+1)\right] (\frac{2}{a} p)^{2j}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

---

(1) $N_\nu(at) = \frac{J_\nu(at) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(at)}{\sin \nu\pi}$, $r = \sqrt{p^2 + a^2}$, $R = p + r$

Dans tout ce chapitre $|\ \arg a\ | < \pi$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{N_\nu(at)}{t} \quad \supset \quad \frac{(\frac{a}{R})^\nu \cos \nu\pi + (\frac{R}{a})^\nu}{\nu \sin \nu\pi} \qquad \nu \text{ non entier ni nul}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_0(at)}{t} \quad \supset \quad (\log \frac{R}{a})^2 - (\log \frac{2}{aC})^2 + \frac{\pi^2}{6} \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_1(at)}{t} \quad \supset \quad -\frac{2}{a} r \log \frac{R}{a} + \frac{2}{a}(\log \frac{2}{aC} + 1)p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_2(at)}{t} \quad \supset \quad 2\frac{pr}{a^2} \log \frac{R}{a} - 2(\log \frac{2}{aC} + \frac{3}{2}) \frac{p^2}{a^2} - \log \frac{2}{aC} - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_{2n}(at)}{t} \quad \supset \quad -\frac{1}{2n}\left[(\frac{a}{R})^{2n} - (\frac{R}{a})^{2n} \right] \log \frac{R}{a} -$$

$$- \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+j} C_{n+j}^{2j} \left[\log \frac{2}{a} + \frac{1}{2n} + \psi(n+j) \right] (\frac{2}{a}p)^{2j}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_{2n+1}(at)}{t} \quad \supset \quad -\frac{1}{2n+1}\left[(\frac{a}{R})^{2n+1} + (\frac{R}{a})^{2n+1} \right] \log \frac{R}{a} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1+j} C_{n+1+j}^{2j+1} \left[\log \frac{2}{a} + \frac{1}{2n+1} + \psi(n+1+j) \right] (\frac{2}{a}p)^{2j+1}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_0(at)}{t^2} \quad \supset \quad -p (\log \frac{R}{a})^2 + 2r \log \frac{R}{a} + [(\log \frac{2}{aC})^2 - \frac{\pi^2}{6} - 2]\, p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi N_1(at)}{t^2} \quad \supset \quad \frac{a}{2} (\log \frac{R}{a})^2 + \frac{pr}{a} \log \frac{R}{a} - (\log \frac{2}{aC} + \frac{3}{2}) \frac{p^2}{a} -$$

$$- \frac{a}{2} \left[(\log \frac{2}{aC} + \frac{1}{2})^2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} \right]$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi\, N_2(at)}{t^2} \supset -\frac{2}{3}\frac{r^3}{a^2}\log\frac{R}{a} + \frac{2}{3}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{3} + \psi(3)\right]\frac{p^3}{a^2} + \left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{6} + \psi(2)\right]p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi\, N_{2n}(at)}{t^2} \supset -\frac{1}{4n^2-1}\left\{r\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{2n} + \left(\frac{R}{a}\right)^{2n}\right] + \frac{p}{2n}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{2n} - \left(\frac{R}{a}\right)^{2n}\right]\right\}\log\frac{R}{a} +$$

$$+ \frac{a}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n+j)(n+1+j)}\,C^{2j+1}_{n+1+j}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{2n+1} + \psi(n+1+j) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n}\,\frac{n-j}{n+j} + \frac{1}{n}\,\frac{n-j}{4n^2-1}\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$$

$$n \geq 1$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi\, N_{2n+1}(at)}{t^2} \supset -\frac{1}{(2n+1)^2 - 1}\left\{r\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} - \left(\frac{R}{a}\right)^{2n+1}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{p}{2n+1}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} + \left(\frac{R}{a}\right)^{2n+1}\right]\right\}\log\frac{R}{a} -$$

$$- \frac{a}{2}\sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{(n+j)(n+1+j)}\,C^{2j}_{n+1+j}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{2(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \psi(n+1+j) - \frac{1}{2n+1}\,\frac{n+1-j}{n+j} + \frac{2}{2n+1}\,\frac{n+1-j}{(2n+1)^2-1}\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$$

$$n \geq 1$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi\, N_0(at)}{t^3} \supset \frac{2p^2-a^2}{4}\left(\log\frac{R}{a}\right)^2 - \frac{3}{2}\,pr\log\frac{R}{a} - \frac{1}{2}\left[\left(\log\frac{2}{aC}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{7}{2}\right]p^2 +$$

$$+ \frac{a^2}{4}\left[\left(\log\frac{2}{aC} + 1\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\pi\, N_1(at)}{t^3} \supset -\frac{a}{2}p\left(\log\frac{R}{a}\right)^2 - \frac{p^2-2a^2}{3a}r\log\frac{R}{a} + \frac{1}{3}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{3} + \psi(3)\right]\frac{p^3}{a} +$$

$$+ \frac{a}{2}\left[\left(\log\frac{2}{aC} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{13}{12}\right]p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\ \mathrm{Im}\ a\ |$$

$$\pi N_0(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{1}{p} e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\pi N_1(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\frac{1}{2p}\sqrt{\pi\frac{a}{p}}\, e^{-a/2p}\left[K_0\left(\frac{a}{2p}\right) + K_1\left(\frac{a}{2p}\right)\right] \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \pi N_2(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a}\right) e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) + \frac{1}{a}(\log a + 2\gamma) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \pi N_3(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{1}{2p}\sqrt{\pi\frac{a}{p}}\, e^{-a/2p}\left[K_1\left(\frac{a}{2p}\right) + K_2\left(\frac{a}{2p}\right)\right] \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \pi N_4(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \left(\frac{6p}{a^2} + \frac{4}{a} + \frac{1}{p}\right) e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - \frac{6p}{a^2}(\log a + 2\gamma - 1) + \frac{2}{a}(\log a + 2\gamma - 3) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\pi}{\sqrt{t}} N_1(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}(\log a + 2\gamma) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\pi}{t} N_2(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{p}{a} e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - (\log a + 2\gamma - 1)\left(\frac{p}{a} - 1\right) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\operatorname{Pf} \frac{\pi}{t^{3/2}} N_3(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\sqrt{a}\left\{\frac{p^2}{a^2} e^{-a/p} \operatorname{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - (\log a + 2\gamma - \frac{3}{2})\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{2}\right) + (\log a + 2\gamma - 2)\frac{p}{a}\right\} \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

X – FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES DE PREMIÈRE ESPÈCE (1)

$$\mathrm{Pf}\ I_{-\nu}(at) \quad \sqsupset \quad \frac{1}{s}\left(\frac{S}{a}\right)^{\nu}$$

$$\nu \neq 1,2,3,\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$I_n(at) + \sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^j C_{n-1-j}^{\ j} \left(\frac{2}{a}\right)^{n-2j} \delta^{(n-2j-1)} \quad \sqsupset \quad \frac{1}{s}\left(\frac{S}{a}\right)^{n}$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t} I_{\nu}(at) \quad \sqsupset \quad \frac{1}{\nu}\left(\frac{a}{S}\right)^{\nu}$$

$$\nu \neq 0,-1,-2,-3,-\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^2} I_{\nu}(at) \quad \sqsupset \quad -\frac{a}{2\nu}\left(\frac{a}{S}\right)^{\nu}\left[\frac{a/S}{\nu+1} - \frac{S/a}{\nu-1}\right]$$

$$\nu \neq 1,0,-1,-2,-\ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n+1}} I_{\nu}(at) \quad \sqsupset \quad (-1)^n \frac{a^n}{2^n}\left(\frac{S}{a}\right)^{-\nu-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j C_n^j \left(\frac{S}{a}\right)^{2j}}{(\nu+n-j)(\nu+n-j-1)\ldots(\nu-j)}$$

$$\nu \neq n, n-1, n-2, \ldots \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t} I_0(at) \quad \sqsupset \quad -\log\frac{C}{2}S = -\operatorname{arg\,ch}\frac{p}{a} - \log\frac{a}{2}C$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^2} I_0(at) \quad \sqsupset \quad p\log\frac{C}{2}S - s \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

---

(1) $s = \sqrt{p^2 - a^2}$, $S = p + s$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^3}\, I_0(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{2}\left[\left(p^2+\frac{a^2}{2}\right)\log\frac{C}{2}S-\frac{3}{2}ps-\frac{a^2}{2}\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\frac{1}{t}\, I_1(at) \quad \supset \quad \frac{a}{S}=-\frac{1}{a}(s-p) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^2}\, I_1(at) \quad \supset \quad -\frac{a}{2}\left(\log\frac{C}{2}S+\frac{p}{S}-\frac{1}{2}\right) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\frac{1}{t}\, I_2(at) \quad \supset \quad \frac{1}{2}\frac{a^2}{S^2} \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\frac{1}{t^2}\, I_2(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{3!}\left(2\frac{s}{S}^2-p\right) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^3}\, I_2(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{4!}\left[3a^2\log\frac{C}{2}S-(2p^2-5a^2)\frac{p}{S}+p^2-\frac{9}{4}a^2\right] \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\frac{1}{t^n}\, I_n(at) \quad \supset \quad (-1)^{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{S}{a}\right)^{-2n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{(S/a)^{2j}}{(2n-1-j)!} \qquad n \geq 1 \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n+1}}\, I_n(at) \quad \supset \quad -\left(\frac{a}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\log\frac{C}{2}S+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{a}{2}\right)^n n!\left(\frac{S}{a}\right)^{-2n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{(n-j)}\frac{(S/a)^{2j}}{j!\ (2n-j)!} \qquad n \geq 0 \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^{n+2}}\, I_n(at) \quad \supset \quad \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n!}\left(\frac{2}{a}p\log\frac{C}{2}S+\frac{1}{n+1}\frac{a}{S}-\frac{S}{a}\right)+$$

$$+(-1)^{n+1}\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{S}{a}\right)^{-2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{(n-j)(n+1-j)}\frac{(S/a)^{2j}}{j!\ (2n+1-j)!} \qquad n \geq 0 \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

(pour $n=0$ supprimer le sigma)

$$\frac{1}{t^{1/2}} I_{1/2}(at) \quad \sqsupset \quad \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \operatorname{arg\,th} \frac{a}{p} \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$$

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t^{3/2}} I_{1/2}(at) \quad \sqsupset \quad -\sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[p \operatorname{arg\,th} \frac{a}{p} + a(\log s + \gamma - 1) \right]$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$$

Rappelons que :

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} I_{1/2}(at) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \operatorname{Pf} \frac{\operatorname{sn} at}{t^{n+1}}$$

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t^{1/2}} I_{-1/2}(at) \quad \sqsupset \quad -\sqrt{\frac{2}{\pi a}} (\log s + \gamma) \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$$

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t^{3/2}} I_{-1/2}(at) \quad \sqsupset \quad \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[p(\log s + \gamma - 1) + a \operatorname{arg\,th} \frac{a}{p} \right]$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$$

Rappelons que :

$$\operatorname{Pf} \frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} I_{-1/2}(at) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \operatorname{Pf} \frac{\operatorname{ch} at}{t^{n+1}}$$

X bis – FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES (PREMIÈRE ESPÈCE) D'ARGUMENT $2\sqrt{at}$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_0(2\sqrt{at})}{t} \quad \sqsupset \quad \mathrm{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - 2\log C\sqrt{a}$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_0(2\sqrt{at})}{t^2} \quad \sqsupset \quad -(p-a)\left[\mathrm{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - 2\log C\sqrt{a} + 2\right] - p(e^{a/p} - 2)$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_0(2\sqrt{at})}{t^3} \quad \sqsupset \quad \frac{1}{4}(2p^2 - 4ap + a^2)\left[\mathrm{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - 2\log C\sqrt{a} + 2\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}(3p^2 - ap)e^{a/p} - p^2 + \frac{1}{4}a^2$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$I_2(2\sqrt{at}) \quad \sqsupset \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right)e^{a/p} + \frac{1}{a}$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$\frac{I_2(2\sqrt{at})}{t} \quad \sqsupset \quad \frac{p}{a}(e^{a/p} - 1) - 1$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_2(2\sqrt{at})}{t^2} \quad \sqsupset \quad \frac{a}{2}\left[\mathrm{Ei}^*\left(\frac{a}{p}\right) - 2\log C\sqrt{a} + \frac{3}{2}\right] -$$

$$- \frac{p}{2}\left(\frac{p}{a} + 1\right)(e^{a/p} - 1) + \frac{p}{2}$$

Re $a > 0$ — Re $p > 0$

$$\frac{I_1(2\sqrt{at})}{\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad \frac{1}{a}(e^{a/p} - 1)$$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_1(2\sqrt{at})}{t\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad \mathrm{Ei}^*(\frac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + 1 - \frac{p}{a}(e^{a/p} - 1)$$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{I_1(2\sqrt{at})}{t^2\sqrt{at}} \quad \sqsupset \quad \frac{p}{2}(\frac{a}{p} - 2)\ [\mathrm{Ei}^*(\frac{a}{p}) - 2\log C\sqrt{a} + \frac{5}{2}] +$$

$$+ \frac{p}{2}(\frac{p}{a} - 1)(e^{a/p} - 1) + p$$

Re $a > 0$ Re $p > 0$

$$\mathrm{Pf}\ t^{\nu} I_{2\nu}(2\sqrt{at}) \quad \sqsupset \quad \frac{a^{\nu}}{p^{2\nu+1}}\ e^{a/p}$$

$2\nu \neq -1, -2, -3, -\ldots$ Re $p > 0$

$$t^{-n/2} I_{-n}(2\sqrt{at}) = t^{-n/2} I_n(2\sqrt{at}) \quad \sqsupset \quad \frac{p^{n-1}}{a^{n/2}}\ e^{a/p} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}(\frac{a}{p})^j$$

$n \geq 0$ Re $p > 0$

(pour $n=0$ supprimer le sigma)

XI – FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES DE DEUXIÈME ESPÈCE [1]

Pf $2K_\nu(at)$ $\supset$ $-\frac{\pi}{\sin \nu\pi}\frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^\nu - \left(\frac{S}{a}\right)^\nu\right]$

ν non entier ni nul — Re p > – Re a

$2\,K_0(at)$ $\supset$ $\frac{2}{s}\log\frac{S}{a} = \frac{2}{s}\operatorname{arg\,ch}\frac{p}{a}$ — Re p > – Re a

Pf $2\,K_1(at)$ $\supset$ $-\frac{1}{s}\left(\frac{a}{S}+\frac{S}{a}\right)\log\frac{S}{a} + \frac{2}{a}\log\frac{2}{aC}$ — Re p > – Re a

Pf $2\,K_2(at)$ $\supset$ $\frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^2 + \left(\frac{S}{a}\right)^2\right]\log\frac{S}{a} - \left(\frac{2}{a}\right)^2\left[\log\frac{2}{a} + \psi(2)\right]p$

Re p > Re a

Pf $2\,K_{2n}(at)$ $\supset$ $\frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{2n} + \left(\frac{S}{a}\right)^{2n}\right]\log\frac{S}{a} +$

$$+(-1)^n\frac{2}{a}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_{n+j}^{2j+1}\left[\log\frac{2}{a} + \psi(n+j+1)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$$

$n \geq 1$ — Re p > – Re a

Pf $2\,K_{2n+1}(at)$ $\supset$ $-\frac{1}{s}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{2n+1} + \left(\frac{S}{a}\right)^{2n+1}\right]\log\frac{S}{a} +$

$$+(-1)^n\frac{2}{a}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{n+j}^{2j}\left[\log\frac{2}{a} + \psi(n+j+1)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$$

$n \geq 0$ — Re p > – Re a

Pf $\frac{2}{t}K_\nu(at)$ $\supset$ $-\frac{\pi}{\nu\sin\nu\pi}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^\nu + \left(\frac{S}{a}\right)^\nu\right]$

ν non entier ni nul — Re p > – Re a

---

(1) $K_\nu(at) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(at) - I_\nu(at)\right]$, $S = \sqrt{p^2 - a^2}$, $S = p + s$

Dans tout ce chapitre $|\arg a| < \pi$.

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t}\,K_0(at) \quad \supset \quad -\left(\log\frac{S}{a}\right)^2 + \left(\log\frac{2}{aC}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} \qquad \mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t}\,K_1(at) \quad \supset \quad \frac{2}{a}\,s\log\frac{S}{a} - \frac{2}{a}\left(\log\frac{2}{aC} + 1\right)p =$$

$$= -\frac{a}{S}\left(1 + \log\frac{S}{a}\right) - \frac{S}{a}\left(1 + \log\frac{a}{S}\right) - \frac{2}{a}\,p\log\frac{2}{aC}$$

$$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t}\,K_2(at) \quad \supset \quad -2\,\frac{ps}{a^2}\log\frac{S}{a} + 2\left(\log\frac{2}{aC} + \frac{3}{2}\right)\frac{p^2}{a^2} - \log\frac{2}{aC} - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t}\,K_{2n}(at) \quad \supset \quad \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{2n} - \left(\frac{S}{a}\right)^{2n}\right]\log\frac{S}{a} +$$

$$+ (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{n+j}\,C^{2j}_{n+j}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{2n} + \psi(n+j)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$$

$n \geq 1$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t}\,K_{2n+1}(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{2n+1} - \left(\frac{S}{a}\right)^{2n+1}\right]\log\frac{S}{a} -$$

$$- (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{n+1+j}\,C^{2j+1}_{n+1+j}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \psi(n+1+j)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$$

$n \geq 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t^2}\,K_\nu(at) \quad \supset \quad \frac{a}{2}\,\frac{\pi}{\nu\sin\nu\pi}\left\{\frac{1}{\nu+1}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{\nu+1} + \left(\frac{S}{a}\right)^{\nu+1}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nu-1}\left[\left(\frac{a}{S}\right)^{\nu-1} + \left(\frac{S}{a}\right)^{\nu-1}\right]\right\}$$

ν ni entier ni nul $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t^2}\,K_0(at) \quad \supset \quad p\left(\log\frac{S}{a}\right)^2 - 2s\log\frac{S}{a} - \left[\left(\log\frac{2}{aC}\right)^2 - 2 - \frac{\pi^2}{6}\right]p$$

$$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t^2}\,K_1(at) \quad \supset \quad \frac{a}{2}\left(\log\frac{S}{a}\right)^2 - \frac{ps}{a}\log\frac{S}{a} + \left(\log\frac{2}{aC} + \frac{3}{2}\right)\frac{p^2}{a} -$$

$$- \frac{a}{2}\left[\left(\log\frac{2}{aC} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{6}\right]$$

$$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{2}{t^2} K_2(at) \quad \supset \quad \frac{2}{3}\frac{s^3}{a^2}\log\frac{s}{a} - \frac{2}{3}\left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{3} + \psi(3)\right]\frac{p^3}{a^2} + \left[\log\frac{2}{a} + \frac{1}{6} + \psi(2)\right]p$$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$t^n K_{1/2}(at) \quad \supset \quad \frac{\pi}{\sqrt{2a}}\ \frac{1}{\sqrt{p+a}}\ \frac{(1/2)_n}{(p+a)^n}$$

$n \geq 0$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\frac{1}{t^n} K_{1/2}(at) \quad \supset \quad (-1)^n \frac{\pi}{\sqrt{2a}}\ \frac{1}{\sqrt{p+a}}\ \frac{(p+a)^n}{(1/2)_n}$$

$n \geq 1$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t^n} K_{3/2}(at) \quad \supset \quad -(-1)^n \frac{1}{(2n+1)a}\ \frac{\pi}{\sqrt{2a}}\ \frac{2p-(2n-1)a}{\sqrt{p+a}}\ \frac{(p+a)^n}{(1/2)_n}$$

$n \geq 0$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ K_{5/2}(at) \quad \supset \quad \frac{1}{a^2}\ \frac{\pi}{\sqrt{2a}}\ \frac{4p^2 + 2ap - a^2}{\sqrt{p+a}}$$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\sqrt{t}}{t^{n+1}} K_{1/2}(at) \quad \supset \quad -(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\ \frac{(p+a)^n}{n!}\ [\log(p+a) - \psi(n+1)]$$

$n \geq 0$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \sqrt{t}\, K_{3/2}(at) \quad \supset \quad -\frac{1}{a}\ \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\frac{2p+a}{p+a} + \log C(p+a)\right]$$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\sqrt{t}}{t^{n+1}} K_{3/2}(at) \quad \supset \quad \frac{(-1)^n}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\ \frac{(p+a)^{n+1}}{(n+1)!}\left\{\frac{p-na}{p+a}\ [\log(p+a) - \psi(n+1)] + \frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

$n \geq 0$

$\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$$\text{Pf } K_\nu(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{1}{4\sin\nu\frac{\pi}{2}}\frac{1}{p}\sqrt{\pi\frac{a}{p}}\,e^{a/2p}\left[K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{a}{2p}\right) - K_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{a}{2p}\right)\right]$$

$\nu \neq 0, \pm 2, \pm 4, \pm \ldots$ $\qquad$ Re $p > 0$

$$K_0(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\frac{1}{2p}\,e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) \qquad \text{Re } p > 0$$

$$\text{Pf } K_2(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right)e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) - \frac{1}{2a}(\log a + 2\gamma)$$

Re $p > 0$

$$\text{Pf } K_4(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\left(\frac{3p}{a^2} - \frac{2}{a} + \frac{1}{2p}\right)e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) +$$

$$+\frac{3p}{a^2}(\log a + 2\gamma - 1) + \frac{1}{a}(\log a + 2\gamma - 3)$$

Re $p > 0$

$$\text{Pf } t^\nu K_{2\nu}(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{a^\nu\,\Gamma(2\nu+1)}{2\,p^{2\nu+1}}\,e^{a/p}\,Q\left(\frac{a}{p}, -2\nu\right)$$

$2\nu \neq -1, -2, -3, -\ldots$ $\qquad$ Re $p > 0$

$$\text{Pf } \frac{1}{\sqrt{t}}K_1(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{1}{2\sqrt{a}}\,e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) - \frac{1}{2\sqrt{a}}(\log a + 2\gamma)$$

Re $p > 0$

$$\text{Pf } \frac{1}{t}K_2(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad -\frac{1}{2}\left\{\frac{p}{a}\,e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) - (\log a + 2\gamma - 1)\left(\frac{p}{a} + 1\right)\right\}$$

Re $p > 0$

$$\text{Pf } \frac{1}{t^{3/2}}K_3(2\sqrt{at}) \quad \supset \quad \frac{\sqrt{a}}{2}\left\{\frac{p^2}{a^2}\,e^{a/p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{p}\right) - (\log a - 2\gamma - \frac{3}{2})\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - (\log a + 2\gamma - 2)\frac{p}{a}\right\}$$

Re $p > 0$

XII – EXPONENTIELLE-INTÉGRALE, SINUS ET COSINUS INTÉGRAUX, ET FONCTIONS ANALOGUES.

$\mathrm{Ei}(-at) \quad \supset \quad -\frac{1}{p}\log\frac{p+a}{a}$

$|\arg a| < \pi$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$\log t\ \mathrm{Ei}(-at) \quad \supset \quad -\frac{1}{2p}\left[2\,\mathrm{El}\left(\frac{a}{p}\right) - \left(\log\frac{a}{p}\right)^2 - \left(\log C(p+a)\right)^2 + \left(\log Ca\right)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right]$

$|\arg a| < \pi$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{Ei}(-at)}{t} \quad \supset \quad -\mathrm{El}\left(\frac{a}{p}\right) + \frac{1}{2}\left(\log\frac{a}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\log Ca\right)^2 + \frac{\pi^2}{12}$

$|\arg a| < \pi$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{Ei}(-at)}{t^2} \quad \supset \quad p\left[\mathrm{El}\left(\frac{a}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\log\frac{a}{p}\right)^2 + \log\left(\frac{p}{a}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\log Ca\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} - 1\right] + a\left[\log C(p+a) - 2\right]$

$|\arg a| < \pi$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$

$\mathrm{Ei}^*(bt) \quad \supset \quad -\frac{1}{p}\log\frac{p-b}{b}$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > b$

$\log t\ \mathrm{Ei}^*(bt) \quad \supset \quad -\frac{1}{2p}\left[2\,\mathrm{El}\left(-\frac{b}{p}\right) - \left(\log\frac{b}{p}\right)^2 - \left(\log C(p-b)\right)^2 + \left(\log Cb\right)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right]$

$\mathrm{Re}\ p > b$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{Ei}^*(bt)}{t} \quad \supset \quad -\mathrm{El}(-\frac{b}{p}) + \frac{1}{2}(\log \frac{b}{p})^2 - \frac{1}{2}(\log Cb)^2 + \frac{\pi^2}{12}$$

$$\mathrm{Re}\ p > b$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{Ei}^*(bt)}{t^2} \quad \supset \quad p\,[\,\mathrm{El}(-\frac{b}{p}) - \frac{1}{2}(\log \frac{b}{p})^2 + \log(\frac{p}{b} - 1) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\log Cb)^2 - \frac{\pi^2}{12} - 1\,] - b\,[\log C(p-b) - 2\,]$$

$$\mathrm{Re}\ p > b$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{1}{t}[\mathrm{Ei}(-at) + e^{-at}\mathrm{Ei}^*(at)] \quad \supset \quad \log p \log(p+a) - \log a \log p(p+a) +$$

$$+ (\log a)^2 - (\log Ca)^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

$$|\arg a| < \pi \qquad \mathrm{Re}\ p > -\mathrm{Re}\ a$$

$$\frac{1-e^{at}}{t}\mathrm{Ei}(-at) - \frac{1-e^{-at}}{t}\mathrm{Ei}^*(at) \quad \supset \quad \log \frac{p}{a} \log \frac{p+a}{p-a}$$

$$|\arg a| < \pi \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{chi}\ (at)}{t} \quad \supset \quad -\frac{1}{4}\,\mathrm{El}(\frac{-a^2}{p^2}) + \frac{1}{2}(\log \frac{a}{p})^2 - \frac{1}{2}(\log Ca)^2 + \frac{\pi^2}{12}$$

$$|\arg a| < \pi \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\frac{\mathrm{shi}\ (at)}{t} \quad \supset \quad \mathrm{Shl}\ (\frac{a}{p}) \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{shi}\ (at)}{t^2} \quad \supset \quad -p\,[\,\mathrm{Shl}(\frac{a}{p}) + \mathrm{arg\ th}\ \frac{a}{p}\,] - \frac{a}{2}\log(p^2-a^2) + a(2-\gamma)$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{shi}\ (at)}{t^3} \quad \supset \quad \frac{p^2}{2}\,[\,\mathrm{Shl}(\frac{a}{p}) + \frac{3}{2}\,\mathrm{arg\ th}\ \frac{a}{p}\,] + \frac{a^2}{4}\,\mathrm{arg\ th}\ \frac{a}{p} +$$

$$+ \frac{ap}{2}\log(p^2-a^2) - a(\frac{9}{4} - \gamma)p$$

$$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Re}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{ci}\ (at)}{t} \quad \supset \quad -\frac{1}{4}\,\mathrm{Ei}\,(\frac{a^2}{p^2}) + \frac{1}{2}(\log\frac{a}{p})^2 - \frac{1}{2}(\log Ca)^2 + \frac{\pi^2}{12}$$

$|\arg a| < \pi$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{si}\ (at)}{t} \quad \supset \quad \mathrm{SI}\ (\frac{a}{p}) + \frac{\pi}{2}\log Cp \qquad \mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$$

$$\mathrm{Pf}\ \frac{\mathrm{si}\ (at)}{t^2} \quad \supset \quad -p\,[\,\mathrm{SI}(\frac{a}{p}) + \mathrm{Arc\ tg}\,\frac{a}{p} + \frac{\pi}{2}(\log Cp - 1)\,] -$$

$$- \frac{a}{2}\log(p^2+a^2) + a(2-\gamma)$$

$\mathrm{Re}\ p > |\mathrm{Im}\ a|$

INDEX DES NOTATIONS

a nombre complexe, le plus souvent tel que Re $a > 0$

b nombre réel > 0

n, m nombre entier

ν nombre complexe, ou réel, entier ou non

p, z variables complexes

t, x variables réelles

Im p partie imaginaire de p

Re p partie réelle de p

γ ou log C constante d'Euler (0,577...)

δ distribution de Dirac relative à l'origine, mis pour $\delta(t)$ (voir ci-dessous et page 12)

$C_n^j = \binom{j}{n}$ coefficient du binôme

$(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$, $(a)_0 = 1$

$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ cosinus hyperbolique

$\operatorname{chi}(z) = \log C\, z + \frac{z^2}{2.2!} + \frac{z^4}{4.4!} + \dots$ $|\arg z| < \pi$

cosinus hyperbolique intégral

$\operatorname{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du$ cosinus intégral

$$D_\nu(z) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{2^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} z\, {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right]$$

Fonction de Weber (ou du cylindre parabolique)

$$Ei(-z) = \log C\, z + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z)^j}{j.\, j!}\,, \qquad |\arg z| < \pi$$

$$Ei^*(z) = \log C\, z + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j.\, j!} = Ei(-e^{i\pi} z) - i\pi$$

$$Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du, \quad x > 0$$ exponentielle intégrale

$$Ei^*(x) = v.p. \text{ ou } Pf \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du, \quad x > 0\,,$$ *v.p.* dénotant la valeur principale de Cauchy

$$El(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{j^2}, \quad El(x) = \int_o^x \frac{\log(1+u)}{u}\, du$$ (1)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^x e^{-u^2}\, du$$ fonction d'erreur

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$ fonction d'erreur complémentaire

$$\operatorname{erg}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^x e^{u^2}\, du$$ fonction d'erreur associée

$${}_rF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r;\ \beta_1, \ldots, \beta_s;\ z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_r)_j\ z^j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_s)_j\ j!}$$ fonction hypergéométrique généralisée

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$$ fonction de Bessel modifiée première espèce

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}}{j!\ \Gamma(\nu+j+1)}$$ fonction de Bessel première espèce

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z) \right]$$ fonction de Bessel modifiée deuxième espèce

---

(1) Nous avons introduit cette fonction ainsi que Shi, Si , Φ pour écrire certaines de nos formules. Il ne semble pas que l'étude de ces fonctions soit déjà faite.

$$L_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2j+1}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})\ \Gamma(\nu+j+\frac{3}{2})}$$

fonction de Struve

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\ \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$$

fonction de Bessel deuxième espèce(1)

$$P(x,\nu) = \int_0^x e^{-u}\ u^{\nu-1}\ du, \quad \nu > 0$$

$$Q(x,\nu) = \int_x^\infty e^{-u}\ u^{\nu-1}\ du, \quad x > 0$$

fonctions gamma incomplètes (ou de Prym)

$$r = \sqrt{p^2 + a^2}, \quad R = p + r\ , \quad \log\frac{R}{a} = \text{arg sh}\ \frac{p}{a}$$

$$s = \sqrt{p^2 - a^2}, \quad S = p + s\ , \quad \log\frac{S}{a} = \text{arg ch}\ \frac{p}{a}$$

$$\text{sh}\ z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

sinus hyperbolique

$$\text{shi}\ (x) = \int_0^x \frac{\text{sh}\ u}{u}\ du$$

sinus hyperbolique intégral

$$\text{Shl}\ (z) = \frac{\text{El}\ (z) - \text{El}\ (-z)}{2}$$

$$\text{si}\ (x) = -\int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\ du\ , \quad x > 0$$

sinus intégral

$$\text{Sl}(z) = -i\ \text{Shl}\ (iz)$$

$$v = \sqrt{p^2 - ia^2} \qquad V = p + v$$

$$Y(t) = \begin{matrix} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t > 0 \end{matrix}$$

fonction de Heaviside (ou échelon unité)

$$Y(t)\ f(t) = \begin{matrix} 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) & \text{pour } t > 0 \end{matrix}$$

$$Y(t-b)\ f(t) = \begin{matrix} 0 & \text{pour } t < b \\ f(t) & \text{pour } t > b \end{matrix}$$

---

(1) La plupart des auteurs la notent $Y_\nu(z)$; nous avons préféré $N_\nu(z)$ (cf Magnus und Oberhettinger) pour éviter la confusion avec $Y(t)$ réservé à la fonction de Heaviside

$\delta(t-c)$, c réel — distribution de Dirac relative au point d'abscisse c

$\delta^{(n)}(t-c)$ — sa dérivée d'ordre n (v.page 12)

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{z-1}\, du$, *si* Re $z > 0$ — fonction d'Euler (deuxième espèce)

$$\theta = \text{Arc tg}\,\frac{a}{p} = \frac{1}{2i}\log\frac{p+ia}{p-ia}$$

$$\Sigma(\nu\,;\,z) = e^{-z}z^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j+1-\nu}}{j!\ (j+1-\nu)}\ , \qquad \nu \neq 1,2,3,\ldots$$

fonction de Schlomilch associée

$$\varphi = \text{arg th}\,\frac{a}{p} = \frac{1}{2}\log\frac{p+a}{p-a}$$

$$\Phi(n\,;\,-m\,;\,\nu\,;\,z) = \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j\ (2j-m)!}{j!\ (\nu)_j}\,\frac{1}{z^{2j-m+1}} \qquad m \leq 2n$$

$$\Phi'_z(n\,;\,-m\,;\,\nu\,;\,z) = \Phi(n\,;\,-m+1\,;\,\nu\,;\,z)$$

$\psi(z)$ = dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$, $\psi'(z)$, $\psi''(z)$ ses dérivées

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\ , \qquad n \text{ entier} > 0$$

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 7

Première partie
DEFINITIONS ET THEOREMES

CHAPITRE I - DISTRIBUTIONS ET PSEUDO-FONCTIONS

I - Distributions 11
II - Parties finies et pseudo-fonctions 15

CHAPITRE II - TRANSFORMATION DE LAPLACE ET DISTRIBUTIONS 23

CHAPITRE III - TRANSFORMATION DE LAPLACE ET PSEUDO-FONCTIONS

I - Relations principales 27
II - Passage de l'image de Pf $Y(t)\, g(t)$ à celle de Pf $Y(t)\, g(it)$ 30
III - Emploi du prolongement analytique 33
IV - Emploi des formules opératoires 35

CHAPITRE IV - INVERSION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

I - Théorèmes et méthode de Schwartz 39
II - Généralisation de la méthode de Heaviside 42

CHAPITRE V - QUELQUES PROPRIETES DES IMAGES DES DISTRIBUTIONS ET DES PSEUDO-FONCTIONS

I - Généralisation des théorèmes abéliens 45
II - Comportement à l'infini 46
III - Une égalité 47
IV - Convergence des images et des originaux 49

CHAPITRE VI - QUELQUES APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

I - Représentations de la fonctionnelle de Dirac 51
II - Dérivées et primitives d'ordre quelconque 52
III - Equation de Poisson ; distributions invariantes par rotation 53
IV - Formules de composition 57
V - Développements en série 58

BIBLIOGRAPHIE 59

Seconde partie

TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

AVERTISSEMENT 63

I - Principales distributions 64
II - Fonctions algébriques et fonctions analogues 65
III - Logarithmes 69
IV - Exponentielles 71
V - Fonctions hyperboliques 74
VI - Fonctions circulaires 78
VII - Fonction d'erreur et fonction complémentaire 83
VIII - Fonctions de Bessel de première espèce 84
VIII bis - Fonctions de Bessel de première espèce d'argument $2\sqrt{at}$ 89
IX - Fonctions de Bessel de deuxième espèce 91
X - Fonctions de Bessel modifiées de première espèce 95
X bis - Fonctions de Bessel modifiées (première espèce) d'argument $2\sqrt{at}$ 98
XI - Fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce 100
XII - Exponentielle-intégrale, sinus et cosinus intégraux et fonctions analogues 104

INDEX DES NOTATIONS 107

ERRATA

page 19, ligne 15 :

ν entier fixe supérieur à K et au plus grand de Re ν_k

page 31, après (III;13) :

r_n = résidu en $z = iy_n$ de

$$[g(z) - c_{n_o} \log (z - iy_n)]\, e^{ipz} \quad ,$$

$$r_o = \sum_{k=1}^{K} b_k \frac{1}{(k-1)!} (ip)^{k-1} \quad .$$

Précisons que

$$\log (iy - iy_n) = \begin{cases} \log (y_n - y) - i\pi/2 & \text{si } y < y_n \\ \log (y - y_n) + i\pi/2 & \text{si } y > y_n \, . \end{cases}$$

avant dernière ligne : -2π au lieu de 2π.

page 39, théorème I :

T dans (D'_+) à support $\subset (0, \infty)$.

page 108, lignes 1 et 2 :

j = 1 sous les sigma.

IMP. LOUIS-JEAN — GAP
Depôt légal n° 136 — 1962

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

APPLICATION DES DISTRIBUTIONS A LA THEORIE DES PARTICULES ELEMENTAIRES

Vu et approuvé :
Paris, le 12 Juin 1962
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE